MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie Z7

1

N1 Tonko sa zúčastnil pretekov v behu, na ktorých štartovalo 15 bežcov. Po vyhlásení výsledkov zistil, že jeho štartovné číslo je rovné trom poloviciam čísla určujúceho jeho poradie v pretekoch. Koľký v poradí mohol Tonko dobehnúť? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie:

Štartovné číslo bolo násobkom 3, teda 3, 6, 9, 12 alebo 15. Mohol dobehnúť na 2., 4., 6., 8. alebo 10. mieste.

N2 Psíček a mačička cez víkend zavárali marhule. V sobotu psíček zaváral o štvrť hodinu dlhšie ako mačička. V nedeľu mačička zavárala o šestinu času dlhšie ako psíček. Za celý víkend mačička zavárala o päť minút dlhšie ako psíček. Ako dlho v nedeľu zaváral psíček?

Riešenie:

Šestina psíčkovho nedeľného času bola $15 + 5$ čiže 20 minút. Psíček v nedeľu zaváral 2 hodiny.

N3 Patrik si doviezol z prázdnin od babičky košík sliviek. V utorok zjedol o štvrtinu viac sliviek ako v pondelok, v stredu dve tretiny toho čo v utorok, vo štvrtok o 8 sliviek menej ako v stredu a v piatok 5-krát toľko čo vo štvrtok, čo bolo rovnako ako v stredu. Koľko sliviek zjedol spolu?

Riešenie:

Aby sedeli počty v stredu a v piatok, musel vo štvrtok zjesť 2 slivky, lebo $2+8 = 5\cdot 2$. Takže v stredu a v piatok zjedol 10 sliviek, v utorok 15 a v pondelok 12. Spolu teda zjedol 49 sliviek.

N4 Marta a Nikola vyrábali počas letných prázdnin náramky pre kamarátky. Marta v auguste vyrobila o tri štvrtiny náramkov viac ako v júli. Nikola v auguste vyrobila o tretinu náramkov menej než v júli. Koľko náramkov mohli spolu počas prázdnin vyrobiť? Zistite dve najmenšie hodnoty.

Riešenie:

Najmenšie počty náramkov, ktoré mohli dievčatá vyrobiť sú: Marta v júli 4 a v auguste 7, Nikola v júli 3 a v auguste 2, teda spolu 16 kusov. Druhý najmenší počet náramkov je 32.

2

N1 Pre stavbu zo zhodných kociek musí platiť, že každá z kociek sa dotýka aspoň jednej inej kocky a že dotýkajúce sa kocky majú spoločnú celú stenu. Nájdite spôsob, ako z deviatich kociek s hranami dĺžky 1 cm vytvoriť stavbu, ktorá má povrch:

a) $30\,\mathrm{cm}^2$,

b) $38\,\mathrm{cm}^2$,

c) $28\,\mathrm{cm}^2$.

Riešenie:

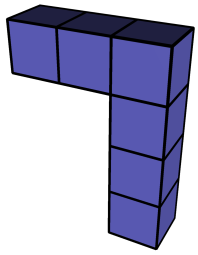
V prvom prípade sa dá vytvoriť jednoposchodová stavba so štvorcovým pôdorysom, v druhom prípade sa dá postaviť jednoduchá veža, v treťom prípade sa dá z ôsmich kociek zložiť kocka s dĺžkou hrany 2 cm a deviatu kocku postaviť na ňu.

N2 Jonáš sa hrá s tromi kockami s hranami dĺžky 4 cm. Chce z nich postaviť stavbu, ktorá bude mať čo najväčší povrch a pritom sa každá z kociek dotýka aspoň jednej ďalšej kocky najmenej štvrtinou jednej svojej steny. Ako môže výsledná stavba vyzerať a aký bude mať povrch?

Riešenie:

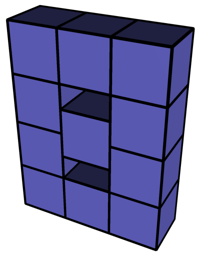
Výsledná stavba bude mať povrch $272\,\mathrm{cm}^2$. Môže vyzerať napríklad tak, že dve kocky budú od seba vzdialené 2 cm a tretia kocka bude položená na nich, štvrtinou svojej steny na každej. Ďalšia možnosť je jednoposchodová stavba, v ktorej sa susedné kocky budú dotýkať štvrtinou steny.

N3 Anička postavila bratovi k 7. narodeninám stavbu zo 7 zhodných kociek v tvare číslice 7. Susedné kocky k sebe zlepila celými stenami, výsledný útvar nalepila na kartón a dostupné steny kociek nafarbila na modro. Bratovi sa to páčilo, a tak Anička uvažovala, že mu niečo podobné vyrobí aj za rok, na čo bude potrebovať o 6 kociek viac ako teraz. O koľko viac stien bude musieť nafarbiť?



Riešenie:

Budúci rok bude Anička skladať číslicu 8 a bude pri tom farbiť o 14 stien viac.



D1 Riešte súťažnú úlohu pre pyramídu s 10 kockami v 4 poschodiach.

Riešenie:

Povrch sa zväčší o 26 a $\frac{2}{3}$ steny, teda približne o 1306,7 cm^2.

3

N1 Nájdite všetky dvojciferné čísla, ktoré po vynásobení 6 dávajú dvojciferný výsledok, pričom pôvodné číslo a výsledok tvoria štyri rôzne číslice.

Riešenie:

Také dvojciferné číslo môže byť najviac 16, zadaniu vyhovujú dve čísla, a to 13, lebo $13 \cdot 6 = 78$, a 15, lebo $15 \cdot 6 = 90$.

N2 Nájdite všetky trojciferné čísla, ktoré po vynásobení 8 dávajú trojciferný výsledok, pričom pôvodné číslo a výsledok tvorí šesť rôznych číslic.

Riešenie:

Vyhovuje iba 123, vtedy $123 \cdot 8 = 984$.

N3 Jožko si nevedel spomenúť na kód na zámku od bicykla. Vedel, že jeho kód je štvorciferný, jeho cifry sú usporiadané zostupne a celý kód je deliteľný 25. Nájdite všetky možné kódy, ktoré by mal Jožko vyskúšať.

Riešenie:

Deliteľnosť 25 znamená, že posledné dvojčíslie je 00, 25, 50 alebo 75. Z nich vyhovujú podmienkam iba 50 a 75, k nim sa dajú doplniť kódy takto: 9850, 9750, 9650, 8750, 8650, 7650, 9875.

D1 Julka, Klára a Maruška išli na plaváreň. Pre čísla ich skriniek platí:

- Všetky tri čísla sú dvojciferné.
- Žiadna cifra sa v týchto číslach sa neopakuje.
- Julkino i Klárino číslo bolo prvočíslo.
- Maruškino číslo bolo trojnásobkom Julkinho čísla.
- Klárino číslo bolo väčšie ako Julkino a menšie ako Maruškino.

Aké mohli byť čísla skriniek? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie:

Julka si mohla zvoliť číslo 19, potom by Maruška mala 57 a Klára 23 alebo 43, ďalej číslo 23, potom by Maruška mala 69 a Klára 41 alebo 47, alebo číslo 29, potom by Maruška mala 87 a Klára 31, 41, 43, 53 alebo 61.

4

N1 V tajomnej hale sú modré, zelené a červené dvere. Iba dvoje z týchto dverí vedú von, za tretími se skrýva hladný tiger. Na dverách sú nasledujúce nápisy:

Modré: „Tiger nie je za týmito dverami.".

Zelené: „Tiger nie je za modrými dverami.".

Červené: „Tiger nie je za týmito dverami.".

Strážca chcel pomôcť a správne prezradil, že dva nápisy sú pravdivé a jeden je nepravdivý. Za ktorými dverami sa skrýva tiger?

Riešenie:

Nápis na modrých a zelených dverách hovorí to isté, oba nápisy teda musia byť buď pravdivé, alebo nepravdivé. Keďže sú dva nápisy pravdivé, musí byť nepravdivý nápis na červených dverách, tiger je teda za nimi.

N2 Jarka má viac ako 10 a menej ako 15 rokov. Keď sa jej niekto spýtal na jej vek, odpovedala v hádankách. Raz povedala: „Môj vek je deliteľný 3, nie je prvočíselný a nie je párny.". Jedna z týchto informácií nebola pravdivá, zvyšné dve boli pravdivé. Koľko rokov má Jarka?

Riešenie:

Má 12 rokov.

N3 V osade žili mafiáni a normálni ľudia. Mafiáni vždy klamali, normálni ľudia vždy hovorili pravdu. Pri návšteve tejto osady stretol turista troch domácich: Adama, Braňa a Cyrila. Spýtal sa Adama, či je mafián, ale ten si len niečo zamrmlal a nebolo mu vôbec rozumieť. Braňo povedal: „Adam hovoril, že je mafián". Na to Cyril dodal: „Braňovi sa nedá veriť, veď on sám je mafián!". Je Adam mafián, alebo nie?

Riešenie:

Braňo je určite mafián, pretože to Adam o sebe nikdy povedať nemohol. Cyril teda hovorí pravdu, ale o Adamovi sa rozhodnúť nemôžeme.

D1 V čarovnej záhrade žije Alenka spolu so psom, mačkou a kozou. Raz Alenka upiekla tortu, dala ju na záhradu vychladnúť, ale keď sa vrátila, torta bola zjedená. Alenka začala zisťovať, čo sa stalo, a každé zo zvierat jej niečo povedalo:

Pes: „Ja som jediným pánom celej záhrady a tortu som nezjedol.".

Mačka: „Ja som jediným pánom celej záhrady a pes tortu nezjedol.".

Koza: „Ja som tortu nezjedla, zjedol ju pes."

Alenka vedela, že každé zo zvierat malo aspoň čiastočne pravdu. Kto teda zjedol tortu?

Riešenie:

Keďže vždy je aspoň časť tvrdenia pravdivá, nemohla tortu zjesť koza – v takom prípade by obe časti jej tvrdenia boli nepravdivé. Pokiaľ by tortu zjedol pes, musel by buď on, alebo mačka úplne klamať, ale to nie je možné. Preto tortu musela zjesť mačka.

5

N1 Zostrojte kružnicu opísanú a kružnicu vpísanú štvorcu so stranou dĺžky 5 cm.

Riešenie:

Stredom oboch kružníc je stred štvorca. Polomerom opísanej kružnice je vzdialenosť stredu štvorca a ľubovoľného vrchola, polomerom vpísanej kružnice je vzdialenosť stredu štvorca a stredu jeho ľubovoľnej strany.

N2 K trojuholníku zo zadania súťažnej úlohy zostrojte opísanú a vpísanú kružnicu.

Riešenie:

Stred opísanej kružnice je priesečníkom osí strán trojuholníka, jeho polomer je vzdialenosť tohto stredu a ľubovoľného vrchola. Stred vpísanej kružnice je priesečníkom osí uhlov trojuholníka, jeho polomer je vzdialenosť tohto stredu od ľubovoľnej strany (merané po kolmici).

N3 Je daný rovnostranný trojuholník ABC. Zostrojte polkružnicu, ktorej krajné body ležia na strane AC a ktorá sa dotýka strán AB a BC.

Riešenie:

Stred polkružnice leží v strede strany AB, polomer danej polkružnice je vzdialenosť tohto stredu od strany BC, resp. AC (merané po kolmici).

D1 V trojuholníku ABC so stranami AB dĺžky 6 cm a BC dĺžky 10 cm sa má zostrojiť polkružnica, ktorej krajné body sú vnútornými bodmi strany AC a ktorá sa dotýka zvyšných dvoch strán. Uveďte príklady trojuholníkov ABC, pre ktoré úloha nemá riešenie.

Riešenie:

Trojuholník ABC musí byť tupouhlý alebo pravouhlý.

N1 Pri výlete na jazere Jaro pravidelne striedal veslovanie s odpočinkom. Vždy 2 minúty vesloval, pričom prešiel 60 metrov, a potom minútu odpočíval a vtedy ho vietor vrátil o 4 metre späť. Za ako dlho takto dovesloval na koniec jazera vzdialený 225 metrov?

Riešenie:

Za 10 minút a 54 sekúnd.

N2 Ajka kúpila vrece granúl pre svoje dva psíky, Paličku a Špagetku. Granuly dáva psíkom do rovnakých misiek a kúpené vrece vystačí na 50 takých misiek. Palička zje 3 misky granúl za dva dni, Špagetka zje 4 misky za tri dny. Ako dlho im granuly vydržia?

Riešenie:

Balenie vystačí na 17 dní, v 18. deň už jedna miska chýba.

N3 Uvažujte zadanie súťažnej úlohy bez Števa, teda len Katka pečie a Lucifer kradne. Koľko palaciniek musí Katka napiecť, aby ich ostalo 20, a ako dlho jej to bude trvať?

Riešenie:

Za 90 minút bude mať 18 palaciniek, 20 palaciniek bude mať na tanieri za 99 minút.

D1 Na štadióne behajú Andrea, Betka a Cilka. Andrea je najrýchlejšia a jeden okruh zabehne za 3 minúty, Betke jeden okruh trvá 4 minúty a Cilke 5 minút. Dávid dievčatá odfotil na štarte a potom znovu, vždy keď sa na štartovacej čiare stretli všetky tri. Zakaždým, keď sa na štartovacej čiare stretli dve z dievčat, odfotil ich Emil. Koľko okruhov zabehla Betka do chvíle, kým chlapci nafotili spolu 12 fotografií?

Riešenie:

12 fotografií chlapci nafotili 72 minút po štarte, Betka teda zabehla 18 okruhov.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024