MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy
k úlohám domáceho kola kategórie Z6

1

N1 Lenka zjedla v pondelok 2 cukríky. Každý nasledujúci deň až do nedele potom zjedla o 1 cukrík viac ako v predchádzajúci deň. Koľko cukríkov zjedla za celý týždeň?

Riešenie:

Zjedla $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ čiže 35 cukríkov.

N2 Milan jedol jablká od pondelka do nedele. Každý deň zjedol o 1 jablko viac ako v predchádzajúci deň a spolu za týždeň zjedol 49 jabĺk. Koľko jabĺk zjedol za víkend?

Riešenie:

Keby v pondelok zjedol 1 jablko, za týždeň by zjedol $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ čiže 28 jabĺk. Každé jablko v pondelok navyše znamená 7 jabĺk navyše za týždeň, 4 jablká v pondelok dajú $28 + 3 \cdot 7$ čiže 49 jabĺk za celý týždeň. Za víkend teda zjedol $9 + 10$ čiže 19 jabĺk.

N3 Eva diktovala Petrovi prirodzené čísla od 1 do 100. Peter z diktovaných čísel zapisoval len násobky 3. Keď zapísal 11 čísel, prebral zapisovanie Pavol. Ten z diktovaných čísel zapisoval len násobky 7. Koľko čísel spolu chlapci zapísali?

Riešenie:

Peter zapísal čísla 3, 6, …, 33, t. j. 11 čísel. Potom Pavol zapísal čísla 35, 42, …, 98, t. j. 10 čísel. Spolu teda zapísali $11 + 10$ čiže 21 čísel.

N4 Na Nový rok neznámeho roka začal Jaro behať. Každý pondelok a štvrtok zabehne 4 km, každý utorok a piatok 5 km, každú stredu a sobotu 6 km a každú nedeľu 7 km. Po jednom behu si všimol, že v súčte zabehol presne 100 km. Akým dňom týždňa sa začal rok, keď začal Jaro behať?

Riešenie:

Za jeden týždeň od pondelka do nedele zabehne $(4 + 5 + 6 + 4 + 5 + 6 + 7)$ km čiže 37 km, za dva týždne teda zabehne 74 km. Keby s behaním začal v pondelok, tak by v treťom týždni v sobotu prekonal 100 km, lebo $(74 + 4 + 5 + 6 + 4 + 5 + 6)$ km $= 104$ km. Presne 100 km teda vyjde práve vtedy, keď s behaním začal v utorok.

2

N1 Určte veľkosť uhla, ktorý vo štvorci zvierajú:

a) dve susedné strany,
b) strana a uhlopriečka,
c) dve uhlopriečky.

Riešenie:

Z definície a súmerností štvorca vyplývajú odpovede:

a) 90°.
b) 45°.
c) 90°.

N2 Zostrojte štvorec $ABCD$, ak je dané:

a) strana AB,
b) uhlopriečka AC,
c) stredy strán AB a CD,
d) vrchol A a štvorcu opísaná kružnica.

Riešenie:

Konštrukcie môžeme založiť na nasledujúcich pozorovaniach:

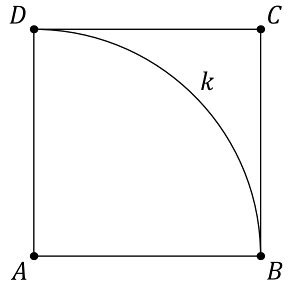
a) Susedné strany ležia na kolmiciach k AB v jej krajných bodoch.

b) Stred uhlopriečky je stredom štvorca a uhlopriečky sú navzájom kolmé.

c) Úsečka spájajúca stredy strán AB a CD je zhodná so stranami štvorca, na dve strany je kolmá, s dvoma je rovnobežná a jej stred je stredom štvorca.

d) Uhlopriečky štvorca sú priemery tejto kružnice a stred kružnice je stredom štvorca.

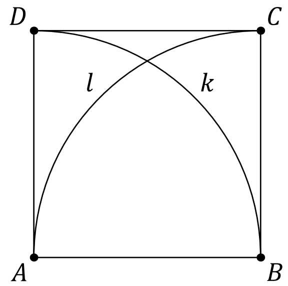
N3 Na obrázku je štvorec $ABCD$ a štvrťkružnica k so stredom A a krajnými bodmi B a D. Zostrojte štvorec $AKLM$ tak, aby $K \in AB$, $L \in k$, $M \in AD$.



Riešenie:

Vrchol L leží na uhlopriečke AC, strany štvorca $AKLM$ buď ležia na stranách štvorca $ABCD$, alebo sú s nimi rovnobežné.

D1 Na obrázku je štvorec $ABCD$ a dve štvrťkružnice k a l so stredmi a krajnými bodmi vo vrcholoch štvorca. Zostrojte štvorec $KLMN$ taký, že úsečka KL je časťou úsečky AB, $M \in k$ a $N \in l$.



Riešenie:

Obrázok je súmerný podľa osi úsečky AB. Stredy úsečiek AB a KL splývajú a rovnako aj ich spojnice s vrcholmi C a M, resp. D a N.

D2 Sú dané kružnice k a l, ktoré majú rovnaké polomery a navzájom sa pretínajú. Zostrojte všetky také štvorce $ABCD$, že $A, B \in k$ a $C, D \in l$.

Riešenie:

Všetko je súmerné podľa spojnice stredov kružníc. Stred štvorca je jej stredom a uhlopriečky štvorca s ňou zvierajú uhol veľkosti 45°. Úloha má dve riešenia.

3

N1 Určte, či sú čísla 48, 54, 60, 72, 108 deliteľné 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 alebo 36.

Riešenie:

Číslo 48 je deliteľné všetkými uvedenými číslami okrem 9, 18, 36. Číslo 54 je deliteľné všetkými okrem 4, 12, 36. Číslo 60 je deliteľné všetkými okrem 9, 18, 36. Čísla 72 a 108 sú deliteľné všetkými bez výnimky.

N2 Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:

a) Ak je číslo deliteľné 2 a 18, tak je deliteľné 36.

a) Ak je číslo deliteľné 3 a 12, tak je deliteľné 36.

a) Ak je číslo deliteľné 4 a 9, tak je deliteľné 36.

Riešenie:

Vo všetkých troch prípadoch je 36 súčinom uvedených činiteľov, avšak aby tvrdenia platili, musia byť delitele nesúdeliteľné. Platí teda iba tvrdenie c). Najmenšie protipríklady k tvrdeniam a), resp. b) sú 18, resp. 12.

N3 Koľko existuje štvorciferných palindrómov deliteľných 4?

Riešenie:

Posledné dvojčíslie po prehodení číslic určuje prvé dvojčíslie. Posledné dvojčíslie musí byť deliteľné 4 a prvé sa nesmie začínať nulou. Hľadaných palindrómov je toľko, koľko je dvojčíslí deliteľných 4 a nekončiacich sa nulou, a tých je dvadsať: 04, 08, 12, 16, 24, 28, 32, 36, 44, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 88, 92, 96.

N4 Koľko existuje trojciferných palindrómov deliteľných 9 väčších ako 300?

Riešenie:

Prvá a posledná cifra sú rovnaké, súčet cifier musí byť deliteľný 9. Prostredná cifra je teda určená susednými ciframi. Hľadaných palindrómov je osem: 333, 414, 585, 666, 747, 828, 909, 999.

D1 Dva delitele d a e daného čísla n nazveme *sesterskými*, ak číslo n delí číslo $d \cdot e$. Koľko dvojíc sesterských deliteľov má číslo 24?

Riešenie:

Delitele čísla 24 sú 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 a súčin sesterských deliteľov je násobkom 24. Číslo 24 má 16 dvojíc sesterských deliteľov: $(1, 24)$, $(2, 12)$, $(2, 24)$, $(3, 8)$, $(3, 24)$, $(4, 6)$, $(4, 12)$, $(4, 24)$, $(6, 8)$, $(6, 12)$, $(6, 24)$, $(8, 12)$, $(8, 24)$, $(12, 12)$, $(12, 24)$, $(24, 24)$.

4

N1 Mach povedal Maxovi: „Dnes sme spoločne zasadili 20 stromov.“.

Max na to: „A ja som ich zasadil presne tretinu.“.

Mohli mať obaja chlapci pravdu?

Riešenie:

Nemohli, lebo číslo 20 nie je deliteľné 3.

N2 V košíku s jablkami bola polovica jabĺk červených a dve tretiny boli červivé. Koľko najmenej jabĺk bolo v košíku?

Riešenie:

Počet jabĺk v košíku bol kladným násobkom 2 a 3, takže ich bolo najmenej 6.

N3 Selma mala o 3 rubíny menej ako Telma. Telma mala 3-krát menej rubínov ako Velma. Koľko mohli mať Selma, Telma a Velma spolu rubínov, ak ich bolo menej ako 30?

Riešenie:

Počet rubínov Velmy bol násobkom 3, Telma mala aspoň 3 rubíny. Velma, Telma a Selma mali postupne najmenej 9, 3 a 0 rubínov, teda spolu 12. Ďalšie možnosti sú $12 + 4 + 1$ čiže 17, $15 + 5 + 2$ čiže 22, $18 + 6 + 3$ čiže 27. Spolu mohli mať 12, 17, 22 alebo 27 rubínov.

N4 Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:

a) Keď Ola zje štvrtinu jabĺk z košíka a Iva zje polovicu jabĺk z toho istého košíka, tak v košíku ostanú tri osminy jabĺk.

b) Keď si Ola zoberie polovicu rubínov z trezoru a Iva si zoberie štvrtinu zvyšných rubínov, tak v trezore ostane štvrtina rubínov.

c) Keď si Ola vyberie štvrtinu filmov z ponuky v kine a Iva si vyberie štvrtinu filmov z tej istej ponuky, tak si spolu vyberú polovicu filmov.

Riešenie:

Prvé dve tvrdenia nie sú pravdivé, o treťom nevieme bez ďalších informácií rozhodnúť.

D1 Babka priniesla na trh vajcia. Prvému zákazníkovi predala polovicu všetkých a 1 vajce, druhému zákazníkovi predala polovicu zvyšku a 1 vajce, tretiemu zákazníkovi predala polovicu nového zvyšku a 1 vajce a ostalo jej ešte 10 vajec. Koľko ich priniesla na trh?

Riešenie:

Babke na konci ostalo 10 vajec. Keďže tretiemu zákazníkovi ich predala 12, predtým ich mala 22. Keďže druhému ich predala 24, predtým ich mala 46. Keďže prvému ich predala 48, na trh ich priniesla 94.

5

N1 Dlhý, Široký a Bystrozraký dostali tri mince: zlatú, striebornú a bronzovú. Koľkými spôsobmi si ich mohli rozdeliť, aby mal každý jednu? Všetky možnosti vypíšte.

Riešenie:

Spolu je 6 možností:

- Dlhý: zlatá, Široký: strieborná, Bystrozraký: bronzová;

- Dlhý: zlatá, Široký: bronzová, Bystrozraký: strieborná;
- Dlhý: strieborná, Široký: zlatá, Bystrozraký: bronzová;
- Dlhý: strieborná, Široký: bronzová, Bystrozraký: zlatá;
- Dlhý: bronzová, Široký: zlatá, Bystrozraký: strieborná,
- Dlhý: bronzová, Široký: strieborná, Bystrozraký: zlatá.

N2 Peter a Pavol mali spolu tri ananásy. Žiadny ananás nedelili na časti.

Peter povedal: „Ja mám rovnako veľa ananásov ako ty.".

Pavol povedal: „Ja nemám viac ananásov ako ty.".

Koľko ananásov mohol mať každý z chlapcov, ak:

a) klamal práve jeden z nich,
b) klamali obaja chlapci?

Riešenie:

Peter určite klamal, lebo 3 ananásy sa nedajú bez delenia na rovnaké časti.

a) Pavol neklamal, teda mohli mať buď Pavol 0 ananásov a Peter 3, alebo Pavol 1 a Peter 2.
b) Pavol klamal, teda mohli mať buď Peter 0 ananásov a Pavol 3, alebo Peter 1 a Pavol 2.

N3 Každý Marťan je buď klamár, alebo poctivec. Dvaja Marťania sa stretli a jeden povedal: „Ja som klamár a ty si poctivec.". Čo boli títo Marťania zač?

Riešenie:

Ten, ktorý hovoril, bol klamár, lebo poctivec o sebe nemôže nepravdivo tvrdiť, že je klamár. Pretože klamal a sám bol klamár, druhý Marťan musel byť tiež klamár, inak by bol klamárov výrok pravdivý. Obaja Marťania teda boli klamári.

N4 Stretli sa traja Merkúrania, z ktorých každý bol buď klamár, alebo poctivec.

Prvý Merkúran povedal: „Každý z nás troch je klamár.".

Druhý Merkúran povedal: „Práve jeden z nás troch je poctivec.".

Kto z tejto trojice bol klamár a kto poctivec?

Riešenie:

Prvý Merkúran bol klamár, lebo poctivec by o sebe nepravdivo netvrdil, že je klamár. Medzi zvyšnými Merkúranmi bol aspoň jeden poctivec, inak by bol klamárov výrok pravdivý. Druhý Merkúran bol poctivec a tretí klamár, lebo keby bol druhý klamár, musel by byť tretí poctivec, a klamárov výrok by tak bol pravdivý.

D1 Máme tri krabice s vrchnákmi:

Prvý vrchnák je označený ČČ a v krabici sú dve čierne gule.

Druhý vrchnák je označený BB a v krabici sú dve biele gule.

Tretí vrchnák je označený ČB a v krabici je čierna a biela guľa.

Vrchnáky niekto povymieňal tak, že žiadny nepopisuje správne obsah krabice, na ktorej teraz je. Máme za úlohu jeden vrchnák nadvihnúť, vziať poslepiačky jednu guľu z krabice, pozrieť sa na ňu a podľa nej určiť farby gulí vo všetkých krabiciach. Ako sa to dá?

Riešenie:

Treba zobrať guľu z krabice s vrchnákom ČB, kde musia byť dve gule rovnakej farby.

Ak je táto guľa biela, je aj druhá guľa v tejto krabici biela, pod vrchnákom ČČ je čierna a biela guľa, pod vrchnákom BB sú dve čierne gule.

Ak je táto guľa čierna, je aj druhá guľa v tejto krabici čierna, pod vrchnákom ČČ sú dve biele gule, pod vrchnákom BB je čierna a biela guľa.

6

N1 Koľko susedov musí byť trojuholníkov, aby sa kruh v noci

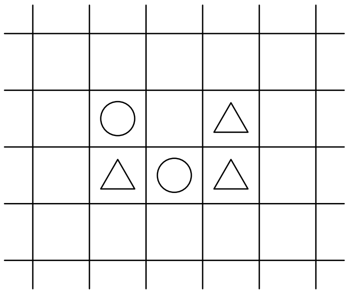
a) určite stal trojuholníkom;
b) mohol stať trojuholníkom?

Riešenie:

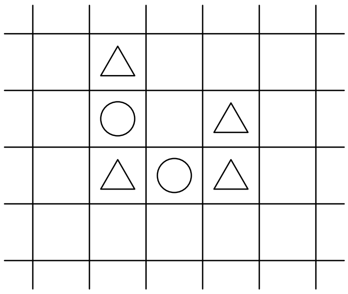
a) Každý môže mať až 4 susedov a v tom prípade 3 z nich musia byť trojuholníky.

b) 1 trojuholník stačí, ak iní susedia nie sú.

N2 Do nasledujúceho obrázka doplňte jeden trojuholník tak, aby na ďalší deň bolo viac trojuholníkov. Nájdite aspoň jedno riešenie.



Riešenie:



Oba kruhy sa stanú trojuholníkmi a trojuholník, ktorý je ich spoločným susedom, sa stane kruhom.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024