MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie Z5

1

N1 Pankrác je o 3 roky mladší ako Servác. Bonifác je štyrikrát starší ako Pankrác. Koľko rokov majú všetci spolu, keď má Pankrác 1 rok? Koľko rokov budú mať všetci spolu o rok neskôr?

Riešenie:

Aj Servác aj Bonifác majú 4 roky. Všetci traja majú spolu 9 rokov. O rok neskôr budú mať spolu 12 rokov.

N2 Linda je o 8 rokov mladšia ako Hanka. Hanka je 5-krát staršia ako Linda. Koľko rokov má ktoré dievča?

Riešenie:

Keby mala Linda 1 rok, Hanka by mala 9 rokov, čo nie je 5-krát viac. Keby mala Linda 2 roky, Hanka by mala 10 rokov, a to je správne riešenie. So zvyšujúcim sa vekom oboch dievčat sa pomer ich vekov zmenšuje, takže už nikdy nebude 5.

N3 Traja súrodenci Jaro, Laco a Patrik se narodili na Hromnice v troch po sebe idúcich rokoch. O dva roky budú mať spolu 30 rokov. Koľko rokov bude mať najstarší z nich budúci rok?

Riešenie:

Tento rok majú súrodenci spolu $30 - 2 \cdot 3$ čiže 24 rokov. Ich veky teda sú 7, 8 a 9 rokov. Najstarší bude mať budúci rok 10 rokov.

N4 Tento rok na Vianoce majú Silvia a Terka spolu o 9 rokov menej ako Uršuľa. O koľko rokov budú mať na Vianoce Silvia a Terka prvýkrát spolu viac rokov ako Uršuľa?

Riešenie:

Každý rok pridá do súčtu vekov Silvie a Terky 2 roky, teda 1 rok navyše oproti tomu, ako pribúdajú roky Uršuli. Musíme teda počkať $9 + 1$ čiže 10 rokov.

D1 Martin a Nina v pondelok ráno dostali každý svoje vrecúško s rovnakým počtom cukríkov. Martin každý všedný deň zjedol rovnaký počet cukríkov a na víkend mu žiadny neostal. Nina jedla cukríky celý týždeň, tiež rovnaký počet každý deň a v nedeľu večer bolo aj jej vrecúško prázdne. Koľko najmenej cukríkov mohlo byť v každom vrecúšku?

Riešenie:

Pretože Martin jedol 5 dní a Nina 7 dní, musí byť hľadané číslo násobkom čísel 5 a 7. Vo vrecúšku bolo aspoň 35 cukríkov.

---

2 N1 Štvorec so stranou 1 cm sa nazýva *jednotkový*. Koľko centimetrov štvorcových má štvorec, ktorý má stredy strán vo vrcholoch jednotkového štvorca?

Riešenie:

Štvorec obsahuje jeden jednotkový štvorec a z prečnievajúcich cípov sa dá poskladať druhý jednotkový štvorec. Obsah štvorca je preto 2 cm^2.

N2 Dĺžka obdĺžnika je 3-krát väčšia ako jeho šírka a jeho obsah je 75 cm^2. Koľko centimetrov meria jeho kratšia strana?

Riešenie:

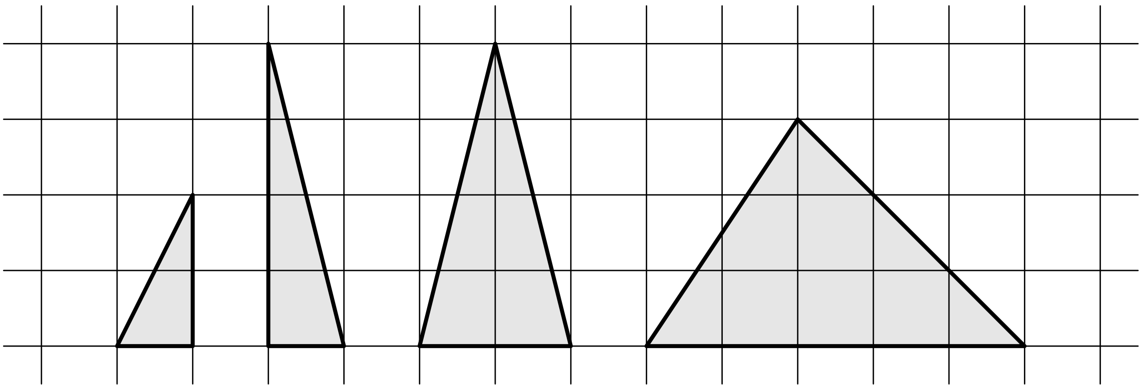
Obdĺžnik je tvorený 3 štvorcami, ktorých strany sú zhodné s kratšími stranami obdĺžnika. Obsah každého štvorca je 25 cm^2. Kratšia strana obdĺžnika teda meria 5 cm.

N3 Štvorec $ABCD$ má strany dĺžky 6 cm. Stred strany AD označíme E a stred strany BC označíme F. Určte obsahy trojuholníkov ABE, BFE, EFD a FCD.

Riešenie:

Trojuholníky sú zhodné a spolu tvoria štvorec $ABCD$. Štvorec má obsah 36 cm^2, obsah každého z trojuholníkov je preto štvrtinový, t. j. 9 cm^2.

N4 Trojuholníky na obrázku majú vrcholy v uzlových bodoch jednotkovej štvorcovej siete, ktorej štvorčeky majú strany dĺžky 1 cm. Určte ich obsahy.



Riešenie:

Každý z trojuholníkov buď tvorí polovicu obdĺžnika, alebo je možné ho na také polovice rozdeliť. Potom vieme spočítať obsadené štvorce siete. Obsahy trojuholníkov sú preto 1 cm^2, 2 cm^2, 4 cm^2 a 7,5 cm^2.

D1 Pravouhlý trojuholník má odvesny s dĺžkami 1 cm a 2 cm. Jeho obsah je 1 cm^2, teda v centimetroch štvorcových je vyjadrený celým číslom. Vlado predĺžil obe odvesny tohto trojuholníka o rovnaký celočíselný počet centimetrov. Je možné, aby obsah Vladovho trojuholníka v cm^2 nebol vyjadrený celým číslom?

Riešenie:

Dĺžky odvesien Vladovho trojuholníka sa líšia o 1 cm, teda jedna je vyjadrená v cm párnym a jedna nepárnym číslom. Súčin týchto čísel je preto párny, takže po delení dvoma dostaneme celé číslo. Obsah v cm^2 je teda vždy vyjadrený celým číslom.

3

N1 Ktoré z nasledujúcich čísel 30, 45, 777, 9999 sa dajú bezo zvyšku deliť 3?

Riešenie:

Všetky uvedené čísla dávajú po delení 3 zvyšok 0.

N2 Namiesto hviezdičky doplňte do oboch výrazov $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby ich hodnoty bolo možné deliť 3 bezo zvyšku. Nájdite všetky riešenia.

Riešenie:

Číslo 30 je možné deliť 3 bezo zvyšku, teda aj doplnené čísla musia byť deliteľné 3 bezo zvyšku. Vyhovujú čísla 3 a 6.

N3 Namiesto hviezdičky doplňte do oboch výrazov $30 + *$ a $30 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby ich hodnoty bolo možné deliť 4 bezo zvyšku. Nájdite všetky riešenia.

Riešenie:

Číslo 30 dáva po delení 4 zvyšok 2, teda doplnené čísla musia po delení 4 dávať zvyšok 2. Vyhovujú čísla 2 a 6.

N4 Namiesto hviezdičky doplňte do oboch výrazov $32 + *$ a $32 - *$ jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby ich hodnoty bolo možné deliť 5 bezo zvyšku. Nájdite všetky riešenia.

Riešenie:

Číslo 32 dáva po delení 5 zvyšok 2, teda prvé číslo musí po delení 5 dávať zvyšok 3 a druhé 2. Ak do oboch výrazov dopĺňame rovnaké číslo, tak úloha nemá riešenie. Ak pripustíme rôzne čísla, tak v prvom výraze vyhovuje 3 a v druhom 2.

D1 Koľko z nasledujúcich 30 výrazov

$$1 + 2, 2 + 3, 3 + 4, \ldots, 29 + 30, 30 + 31$$

je možné bezo zvyšku deliť 3?

Riešenie:

Susedné hodnoty sa líšia o 2, takže zvyšky po delení 3 sú tvorené trojicou 0, 2, 1, ktorá sa opakuje 10-krát. Z týchto výrazov je teda 10 deliteľných 3.

4

N1 Napíšte 5 najmenších kladných čísel, ktoré sú spoločnými násobkami čísel

a) 2 a 3,

a) 3 a 4,

a) 3 a 6.

Riešenie:

Pre každú dvojicu začíname s najmenším spoločným násobkom:

a) 6, 12, 18, 24, 30.

b) 12, 24, 36, 48, 60.

c) 6, 12, 18, 24, 30.

N2 Ako bez delenia zistíme, že 1000-ciferné prirodzené číslo sa dá bezo zvyšku deliť 2?

Riešenie:

Končí sa číslicou 0, 2, 4, 6 alebo 8.

N3 Ktorými jednocifernými prirodzenými číslami sa nedá číslo 84 deliť bezo zvyšku?

Riešenie:

Bezo zvyšku sa nedá deliť číslami 5, 8 a 9, lebo $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

D1 Koľko čísel medzi 11 a 20 je násobkom práve 4 prirodzených čísel?

Riešenie:

Každé číslo je násobkom 1 a seba samého. Hľadáme teda čísla, ktoré sú násobkom 2 ďalších čísel. Medzi uvedenými číslami sú to čísla 14 a 15.

D2 Nájdite 3 najmenšie prirodzené čísla, ktoré je možné bezo zvyšku deliť 4 a 6, ale nie je možné ich bezo zvyšku deliť 24.

Riešenie:

Spoločné násobky čísel 4 a 6 zoradené vzostupne sú 0, 12, 24, 36, 48, 60 atď. Tri najmenšie, ktoré nie sú násobkami 24, sú 12, 36, 60.

5

N1 Koľko ciest z bodu A do bodu B v zadaní súťažnej úlohy má dĺžku

a) 1 km;

b) 2 km?

Riešenie:

a) Taká cesta neexistuje.

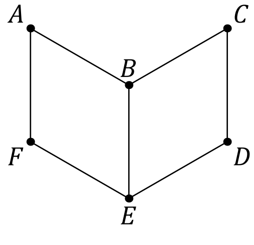
b) Existujú dve cesty: prvá ide najprv 1 km doprava a potom 1 km šikmo doprava nahor a druhá najprv 1 km šikmo doprava nahor a potom 1 km doprava.

N2 Bobo sa chystá na výlet. Z parkoviska k vodopádu vedú 3 cesty. Od vodopádu k vyhliadke vedú 4 cesty. Koľkými spôsobmi môže Bobo dôjsť po cestách z parkoviska okolo vodopádu k vyhliadke? (Bobo sa nevracia ani na parkovisko a ani k vodopádu.)

Riešenie:

Ľubovoľnú cestu od parkoviska k vodopádu môžeme kombinovať s ľubovoľnou cestou od vodopádu k vyhliadke. Z parkoviska k vyhliadke tak Bobo môže ísť $3 \cdot 4$ čiže 12 spôsobmi.

N3 Znázornené úsečky majú v skutočnosti dĺžku 1 m. Z bodu A do bodu C máme po úsečkách prejsť trasu dlhú presne 4 m. Koľkými spôsobmi je možné to spraviť bez toho, aby bola niektorá úsečka použitá dvakrát?



Riešenie:

Možné trasy sú 3:

- $A \to B \to E \to D \to C$,
- $A \to F \to E \to D \to C$,

- $A \to F \to E \to B \to C$.

D1 Slimák lezie po obvode rovnostranného trojuholníka ABC. Začína z vrcholu A, smer lezenia mení iba vo vrcholoch trojuholníka a končí znovu vo vrchole A. Koľkými spôsobmi môže v súčte prejsť dĺžku

a) 4,
b) 5

strán trojuholníka?

Riešenie:

a) 3 spôsobmi:
- $A \to B \to A \to B \to A$,
- $A \to B \to C \to B \to A$,
- $A \to C \to A \to C \to A$,
- $A \to C \to B \to C \to A$.

b) 10 spôsobmi:
- $A \to B \to A \to B \to C \to A$,
- $A \to B \to A \to C \to B \to A$,
- $A \to B \to C \to B \to C \to A$,
- $A \to B \to C \to A \to C \to A$,
- $A \to B \to C \to A \to B \to A$

a ďalších 5 ciest s prehodenými vrcholmi B a C.

D2 Poník behá po obvode štvorca $ABCD$ so stranou dĺžky 100 m. Vždy vybehne z vrcholu A a tam sa aj vráti. Len v tomto bode môže meniť smer obiehania štvorca. Koľko metrov poník nabehal po práve ukončenom 7. obehu trasy?

Riešenie:

Dĺžka každého behu je násobkom obvodu štvorca, a to nezávisle na tom, či poník mení smer alebo nie. Po 7. kole má poník nabehaných $7 \cdot 4 \cdot 100$ čiže 2800 metrov.

6

N1 Maruška mala 1 jednocentovú, 2 dvojcentové, 5 päťcentových, 10 desaťcentových a 20 dvadsaťcentových mincí. Akú sumu mala v minciach?

Riešenie:

Mala $1 + 4 + 25 + 100 + 400$ čiže 530 centov.

N2 Tonko mal jednocentovky, dvojcentovky, päťcentovky a desaťcentovky, z každého druhu aspoň jednu. V jednocentovkách mal rovnakú sumu ako v desaťcentovkách a v dvojcentovkách mal rovnakú sumu ako v päťcentovkách. Koľko najmenej mal Tonko mincí?

Riešenie:

Najmenej mal 10 jednocentoviek, 1 desaťcentovku, 5 dvojcentoviek a 2 päťcentovky, teda 18 mincí.

N3 Miloš mal niekoľko jednocentoviek, 5 dvojcentoviek, niekoľko päťcentoviek a 7 desaťcentoviek v celkovej hodnote 93 centov. Koľko najmenej mal Miloš mincí?

Riešenie:

Jednocentovky a päťcentovky mali celkovú hodnotu $93 - (10 + 70)$ čiže 13 centov. Teda mal najmenej 3 jednocentovky a 2 päťcentovky, takže spolu najmenej $3 + 5 + 2 + 7$ čiže 17 mincí.

D1 Dana mala 2 jablká, 3 hrušky a 4 nektárinky. Ema mala z každého z týchto druhov ovocia 2-krát toľko ako Dana. Jozefína mala hrušiek o 1 viac ako jabĺk a o 1 menej ako nektáriniek. Dievčatá mali spolu 20 nektáriniek. Koľko mali spolu jabĺk?

Riešenie:

Ema mala 4 jablká, 6 hrušiek a 8 nektáriniek. Jozefína mala $20 - 4 - 8$ čiže 8 nektáriniek, a teda $8 - 1 - 1$ čiže 6 jabĺk. Spolu mali dievčatá $2 + 4 + 6$ čiže 12 jabĺk.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024