MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

1 Nech pre reálne čísla a a b majú výrazy $a^2 + b$ a $b^2 + a$ rovnakú hodnotu. Aká najmenšia môže táto hodnota byť?

(Patrik Bak)

Riešenie 1:
Označme s spoločnú hodnotu oboch výrazov. Potom

$$2s = (a^2 + b) + (a + b^2) = \left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 + b + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2},,$$

takže $s \geq -\frac{1}{4}$. V použitých odhadoch nastáva rovnosť práve vtedy, keď $a = b = -\frac{1}{2}$. Vtedy naozaj platí, že oba výrazy majú rovnakú hodnotu $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$ čiže $-\frac{1}{4}$.

Poznámka:
Z uvedeného postupu dokonca vyplýva, že pre *ľubovoľné* reálne čísla a a b platí nerovnosť

$$\max\left(a^2 + b, b^2 + a\right) \geq -\frac{1}{4},$$

pričom rovnosť nastane v jedinom prípade, keď $a = b = -\frac{1}{2}$.

Riešenie 2:
Podľa zadania platí $a^2 + b = b^2 + a$. Z toho dostaneme

$$0 = \left(a^2 + b\right) - \left(b^2 + a\right) = \left(a^2 - b^2\right) - (a - b) = (a - b)(a + b - 1).$$

Rozoberme prípady:

- Nech $a - b = 0$, t. j. $a = b$.
  Oba výrazy teda majú hodnotu $a^2 + a$. Doplnením na štvorec získame

  $$a^2 + a = \left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

  Keďže druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná, minimum nastane práve v prípade $b = a = -\frac{1}{2}$ a jeho hodnota je $-\frac{1}{4}$.
- Nech $a + b - 1 = 0$, t. j. $b = 1 - a$.
  Potom $a^2 + b = a^2 + (1 - a)$ a rovnako $b^2 + a = (1 - a)^2 + a = \left(1 - 2a + a^2\right) + a = a^2 + (1 - a)$. Doplnením na štvorec získame

  $$a^2 - a + 1 = \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

  Minimum je v tomto prípade $\frac{3}{4}$, čo je viac ako $-\frac{1}{4}$.

Poznámka:
Namiesto doplnenia na štvorec je možné využiť známe vlastnosti kvadratickej funkcie: Ako vieme, v prípade kladného koeficientu α funkcia f, kde $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, nadobúda minimum v $-\beta/(2\alpha)$ a toto minimum je $-\beta^2/(4\alpha) + \gamma$. Napríklad v prvom prípade vyššie ide o funkciu f, kde $f(a) = 1 \cdot a^2 + 1 \cdot a + 0$, teda $\alpha = \beta = 1$ a $\gamma = 0$. Jej minimum je preto $-1/4$ a nastáva v prípaede $a = -1/2$.

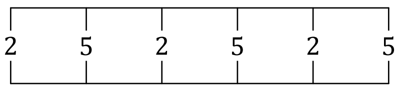
2 Hracie kocky (rovnaké veľkosťou aj rozmiestnením čísel) k sebe prikladáme bočnými stenami tak, aby boli uložené do tvaru štvorca ľubovoľnej veľkosti a aby vždy na dvoch priliehajúcich bočných stenách boli rovnaké čísla. Koľko najviac rôznych čísel sa môže vyskytnúť na horných stenách kociek?

(Martin Panák, Josef Tkadlec)

Riešenie:

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že kocky sú očíslované tak, že čísla 1, 2, 3 sú na susedných stenách v smere chodu hodinových ručičiek a že na každých dvoch navzájom protiľahlých stenách sú čísla so súčtom 7.

Ak $x \in \{1,2,3\}$, tak x-*riadkom* bude nazývať riadok štvorca, ktorého prvá kocka zľava má na ľavej stene číslo x alebo $7-x$. Podobne budeme x-*stĺpcom* rozumieť stĺpec štvorca, ktorého prvá kocka spredu má na prednej stene číslo x alebo $7-x$. Všimnime si, že na stenách kociek x-riadku, resp. x-stĺpca, ktoré sú kolmé na jeho pozdĺžnu os, sa striedajú čísla x a $7-x$.



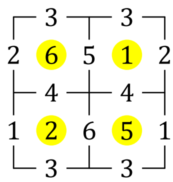
Ďalej si všimnime, že ak sa v celej zostave vyskytne nejaký x-riadok, nemôže sa v nej vyskytovať žiadny x-stĺpec, pretože kocka v tomto riadku a tomto stĺpci by mala dve steny s číslom x. Rozoberieme teraz dva prípady:

- Nech existuje x z $\{1,2,3\}$ také, že všetky riadky sú x-riadky.

  Potom sa na horných stenách kociek nevyskytujú čísla x ani $7-x$, takže sú tam najviac 4 rôzne čísla.
- Nech neexistuje x z $\{1,2,3\}$, že všetky riadky sú x-riadky.

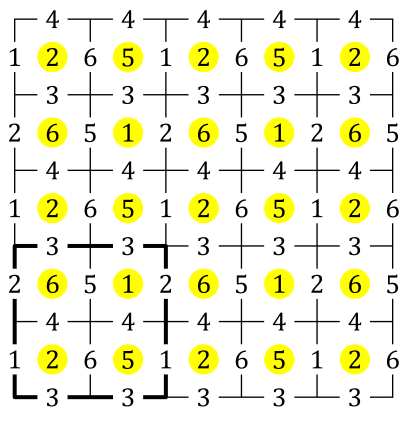
  Potom existujú rôzne y a z z $\{1,2,3\}$ také, že niektorý riadok je y-riadok a niektorý riadok je z-riadok. Žiadny stĺpec preto nie je y-stĺpec ani z-stĺpec, takže všetky stĺpce sú w-stĺpce, kde w je také, že $\{y,z,w\}=\{1,2,3\}$. To znamená, že na horných stenách kociek sa nevyskytujú čísla w a $7-w$, takže aj v tomto prípade sú tam najviac 4 rôzne čísla.

Zostáva uviesť príklad štvorca kociek, v ktorom sa na horných stenách vyskytujú 4 rôzne čísla. Jeden je na obrázku:



Poznámka:

Nie je ťažké si rozmyslieť, že dokonca pre každé n väčšie než 1 je možné n^2 kociek usporiadať do štvorca $n \times n$ tak, aby sa na horných stenách vyskytovali 4 rôzne čísla. Napríklad v prípade $n=5$ je možné kocky vyskladať ako na obrázku tak, aby riadky boli striedavo 1- a 2-riadky s počiatočnými číslami 1, resp. 2 a všetky stĺpce boli 3-stĺpce s počiatočnými číslami 3. Na horných stenách v nepárnych riadkoch sa potom budú striedať čísla 2 a 5 a v párnych riadkoch čísla 6 a 1.



---

3 Nájdite najväčší počet rôznych prirodzených čísel so súčtom 2024 takých, že každé z nich okrem najmenšieho je násobkom súčtu všetkých od neho menších.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Označme čísla $a_1, \ldots, a_n$, pričom $a_1 < \cdots < a_n$, a pre každé k z $\{1,\ldots,n\}$ nech $s_k = a_1 + \cdots + a_k$. Zo zadania vieme, že $s_n = 2024$. Navyše pre každé k z $\{1,\ldots,n-1\}$ platí $s_k \mid a_{k+1}$, a teda platí aj $s_k \mid a_{k+1} + s_k = s_{k+1}$. Postupnosť $(s_1,\ldots,s_n)$ je preto postupnosťou kladných deliteľov čísla 2024, z ktorých každý ďalší deliteľ je násobkom toho predchádzajúceho.

Keďže pre každé k z $\{1,\ldots,n-1\}$ je číslo s_{k+1} násobkom čísla s_k a je väčšie ako s_k, musí vo svojom rozklade na prvočinitele obsahovať aspoň jedného prvočiniteľa navyše oproti rozkladu čísla s_k.

Platí $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, číslo 2024 teda obsahuje vo svojom rozklade 5 prvočiniteľov, a preto sa v postupnosti $(s_1, \dots, s_n)$ sa môže vyskytnúť najneskôr na 6. mieste. Tento prípad pritom nastane práve vtedy, ak súčet s_1 nemá žiadneho prvočiniteľa, teda $s_1 = 1$, a každý ďalší súčet s_{k+1} má práve o jedného prvočiniteľa viac ako predchádzajúci súčet s_k.

Zostáva dokázať, že vyhovujúcich 6 čísel existuje. Zodpovedajúci príklad skonštruujeme pomocou úvah vyššie. Nech napríklad $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = (1, 11, 22, 44, 88, 2024)$. Z toho

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, s_4 - s_3, s_5 - s_4, s_6 - s_5) = (1, 10, 11, 22, 44, 1936),$$

čo naozaj vyhovuje zadaniu.

Poznámka:

Existuje celkom 8 vyhovujúcich príkladov 6 čísel:

$$(1, 10, 11, 22, 44, 1936),$$
$$(1, 10, 11, 22, 968, 1012),$$
$$(1, 10, 11, 484, 506, 1012),$$
$$(1, 10, 242, 253, 506, 1012),$$
$$(1, 22, 23, 46, 92, 1840),$$
$$(1, 22, 23, 46, 920, 1012),$$
$$(1, 22, 23, 460, 506, 1012),$$
$$(1, 22, 230, 253, 506, 1012).$$

Tieto šestice vzniknú zo všetkých vyššie opísaných postupností deliteľov, kde (iba) prípad $s_2 = 2$ sú vylúčené, pretože potom by platilo $a_1 = a_2 = 1$.

Riešenie 2:

Označme čísla a_1, ..., a_n, pričom $a_1 < \cdots < a_n$. Pre každé i z $\{1, \dots, n-1\}$ nech k_i je také, že

$$a_{i+1} = k_i(a_1 + \cdots + a_i).$$

Matematickou indukciou dokážeme, že ak $i \in \{1, \dots, n-1\}$, tak

$$a_i = k_{i-1}(1 + k_{i-2}) \cdots (1 + k_1)a_1$$

a

$$a_1 + \cdots + a_i = (1 + k_{i-1})(1 + k_{i-2}) \cdots (1 + k_1)a_1.$$

1. $a_2 = k_1 a_1$ podľa označenia.
2. Nech $i < n - 1$ a nech
$$a_i = k_{i-1}(1 + k_{i-2}) \cdots (1 + k_1)a_1$$
   a
$$a_1 + \cdots + a_i = (1 + k_{i-1})(1 + k_{i-2}) \cdots (1 + k_1)a_1.$$
   Potom
$$a_{i+1} = k_i(a_1 + \cdots + a_i) = k_i(1 + k_{i-1})(1 + k_{i-2}) \cdots (1 + k_1)a_1$$
   a
$$\begin{aligned} &a_1 + \cdots + a_i + a_{i+1} \\ &= (1 + k_{i-1}) \cdots (1 + k_1)a_1 + k_i(1 + k_{i-1}) \cdots (1 + k_1)a_1 \\ &= (1 + k_i)(1 + k_{i-1}) \cdots (1 + k_1)a_1. \end{aligned}$$

Platí teda

$$a_1 + \cdots + a_n = (1 + k_{n-1}) \cdots (1 + k_1)a_1.$$

Každá z $n - 1$ zátvoriek na pravej strane je prirodzené číslo väčšie ako 1. Zároveň ľavá strana je zo zadania rovná 2024, pričom $2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, takže 2024 má 5 prvočiniteľov. Zátvoriek na pravej strane môže byť preto najviac 5, teda $n - 1 \leq 5$, čiže $n \leq 6$.

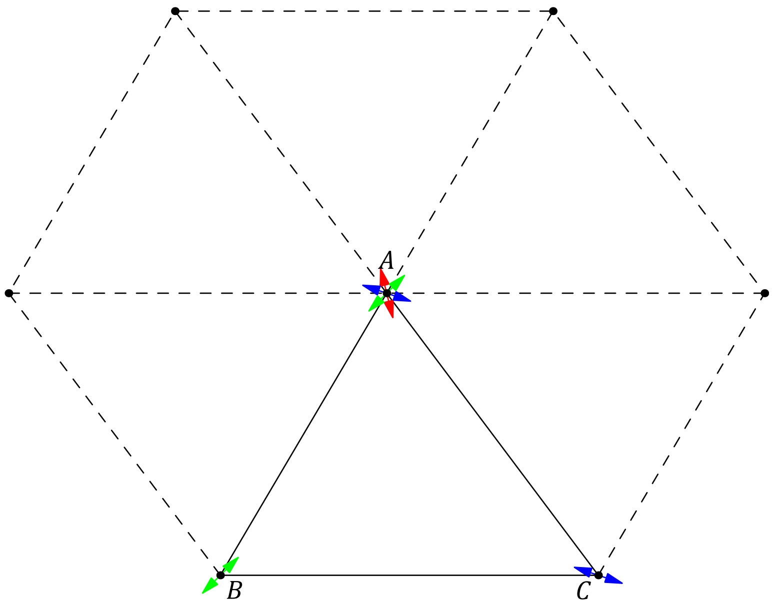
Existencia vyhovujúcich 6 čísel sa ukáže ako v 1. riešení.

4 Nech ABC je trojuholník taký, že $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Jeho posunutím o vektor dĺžky 1 vznikne trojuholník $A'B'C'$. Určte najmenší možný obsah prieniku trojuholníkov ABC a $A'B'C'$.

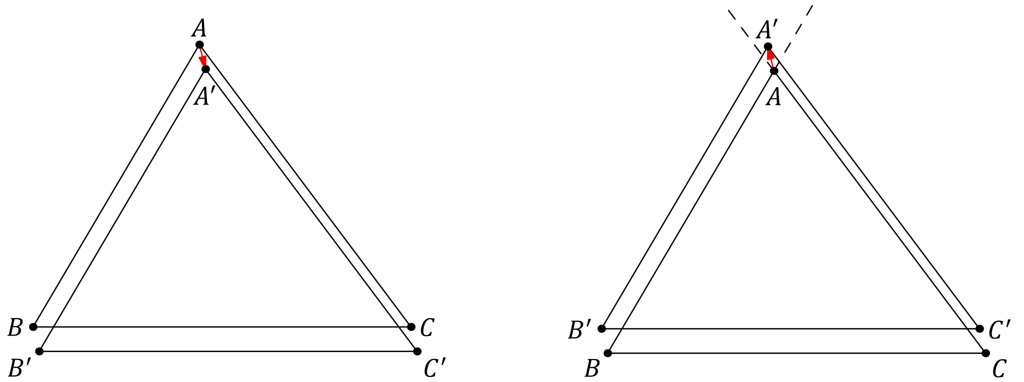
(Tomáš Bárta)

Riešenie:

V celom riešení budeme využívať to, že daný trojuholník ABC je ostrouhlý a že ktorákoľvek jeho výška je väčšia ako zadaná dĺžka posunutia (rovná 1). Tieto (intuitívne zrejmé) tvrdenia overíme až na úplnom konci priamym výpočtom.

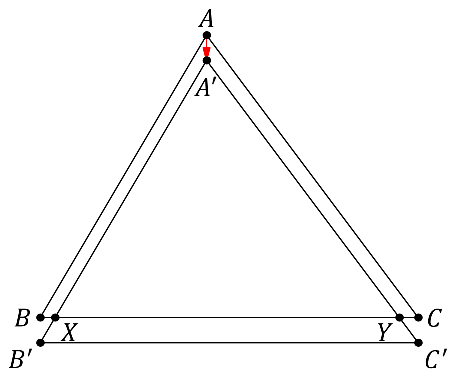


Na obrázku je šesťuholník zložený zo 6 kópií toho istého trojuholníka ABC. Podľa vykreslených vektorov je zrejmé, že nech vyberieme vektor posunutia akokoľvek, a umiestnime ho do vhodne zvoleného vrchola trojuholníka, bude koncový bod tohto jeho umiestnenia ležať buď v niektorom uhle trojuholníka, alebo v uhle k nemu vrcholovom (červené vektory do vrchola A, zelené do vrchola B a modré do vrchola C).



Prípadom vrcholových uhlov sa nemusíme zaoberať, pretože výsledný prienik dvoch trojuholníkov sa nezmení, ak namiesto posúvania pôvodného trojuholníka ABC o daný vektor posunieme výsledný trojuholník $A'B'C'$ o vektor k nemu opačný.

Zamerajme sa teraz na prípad, keď vektor posunutia AA' (zadanej dĺžky 1) leží v uhle BAC (zvyšné prípady, keď BB' leží v uhle ABC, resp. keď CC' leží v uhle BCA, sú analogické). Keďže platí $|A;BC| > 1$, prienikom trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ bude trojuholník $A'XY$, kde X a Y sú body na strane BC také, že $A'X \parallel AB$ a $A'Y \parallel AC$:



Vďaka rovnobežnostiam strán je trojuholník $A'XY$ podobný trojuholníku ABC, a má preto najmenší možný obsah práve vtedy, keď má najkratšiu možnú výšku z vrcholu A'. Táto výška najkratšia, keď vektor posunutia AA' je kolmý na stranu BC. Vtedy je výška z vrcholu A' v trojuholníku $A'XY$ rovná $|A;BC|-1$. Trojuholníky $A'XY$ a ABC sú teda podobné s koeficientom podobnosti $\frac{|A;BC|-1}{|A;BC|}$ čiže $1-\frac{1}{|A;BC|}$, a tak pre najmenší možný obsah prieniku v uvažovanom prípade dostávame hodnotu $S(ABC)\cdot\left(1-\frac{1}{|A;BC|}\right)^2$.

Podobne v prípadoch, keď v trojuholníku ABC leží vektor BB', resp. vektor CC', dostaneme pre najmenšiu možnú hodnotu obsahu prieniku vyjadrenia $S(ABC)\cdot\left(1-\frac{1}{|B;CA|}\right)^2$, resp. $S(ABC)\cdot\left(1-\frac{1}{|C;AB|}\right)^2$. Z nerovností $|AB|<|BC|<|CA|$ zrejme vyplýva $|C;AB|>|A;BC|>|B;CA|$, a preto najmenšia z nájdených troch minimálnych hodnôt je hodnota $S(ABC)\cdot\left(1-\frac{1}{|B;CA|}\right)^2$.

Podľa Herónovho vzorca platí

$$S(ABC)=\sqrt{s(s-|BC|)(s-|CA|)(s-|AB|)},$$

kde $s=\frac{1}{2}(|BC|+|CA|+|AB|)=21$, takže $S(ABC)=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$. Zo vzťahu $S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot|CA|\cdot|B;AC|$ potom dostávame $|B;AC|=\frac{2\cdot 84}{15}=\frac{56}{5}$. Tým sme tiež overili, že najkratšia výška $|B;AC|$ je dlhšia ako 1. To, že trojuholník je ostrouhlý, vyplýva z nerovnosti $15^2<13^2+14^2$ (vďaka kosínusovej vete potom oproti najdlhšej strane AC leží uhol s kladným kosínusom). Z toho dostávame

$$S(ABC)\cdot\left(1-\frac{1}{|B;CA|}\right)^2=84\cdot\left(1-\frac{5}{56}\right)^2=\frac{7803}{112}\doteq 69{,}67.$$

---

5 Samo nastúpil na prízemí nekonečne vysokého mrakodrapu do zvláštneho výťahu. Sú v ňom tlačidlá 0, 1, 2 a tak ďalej. Po prvom stlačení tlačidla pôjde výťah nahor a po každom ďalšom pôjde vždy opačným smerom ako naposledy, pričom po stlačení tlačidla k sa posunie vždy o 2^k poschodí. Navyše každé ďalšie stlačené tlačidlo musí mať menšie číslo ako to predošlé. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné n sa Samo môže dostať na n. poschodie práve dvoma rôznymi postupmi.

(Morteza Saghafian)

Riešenie 1:

Označme t prvé tlačidlo, ktoré Samo stlačí. Pre t z $\{0,1,2,3\}$ môžeme vypísať všetky možné postupy, ktoré môže Samo použiť, a poschodia, v ktorých skončí. Dostaneme nasledujúci zoznam (pri danom t postupy usporiadame podľa počtu použitých tlačidiel):

- $t=0$:
  - $2^0=1$.
- $t=1$:
  - $2^1=2$,
  - $2^1-2^0=1$.
- $t=2$:
  - $2^2=4$,
  - $2^2-2^1=2$,
    $2^2-2^0=3$,
  - $2^2-2^1+2^0=3$.

- $t = 3$:
  - $2^3 = 8$,
  - $2^3 - 2^2 = 4$,
    $2^3 - 2^1 = 6$,
    $2^3 - 2^0 = 7$,
  - $2^3 - 2^2 + 2^1 = 6$,
    $2^3 - 2^2 + 2^0 = 5$,
    $2^3 - 2^1 + 2^0 = 7$,
  - $2^3 - 2^2 + 2^1 - 2^0 = 5$.

Tieto „malé“ prípady nás môžu viesť k domnienke, že pre každé prirodzené číslo t platí nasledujúce tvrdenie: *Ak Samo použije len tlačidlá menšie alebo rovnaké ako t, môže sa dostať na každé z poschodí* $1, \ldots, 2^t - 1$ *práve dvoma spôsobmi a ďalej len na poschodie* 2^t *práve jedným spôsobom.*

Po tom, ako domnienku dokážeme, úloha bude zrejme vyriešená. Na dôkaz domnienky použijeme matematickú indukciu. Pre najmenšie hodnoty t z $\{0, 1, 2, 3\}$ sme tvrdenia overili vyššie.

Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké pevné t také, že $t \geq 3$, a dokážme, že potom platí aj pre $t + 1$. S týmto cieľom uvážime všetky postupy, keď Samo použije len tlačidlá menšie alebo rovnaké ako $t + 1$. Rozlíšime ich podľa toho, či používajú tlačidlo $t + 1$ a či okrem neho používajú aj nejaké iné tlačidlo.

- Pomocou postupov, ktoré tlačidlo $t + 1$ nepoužívajú, sa podľa indukčného predpokladu Samo dostane na každé z poschodí $1, \ldots, 2^t - 1$ práve dvoma spôsobmi a navyše na poschodie 2^t práve jedným spôsobom.
- Ak Samo stlačí tlačidlo $t + 1$ a po ňom ešte aspoň jedno ďalšie, po prvom stlačení bude nasledovať ľubovoľný z postupov vyhodnotených vyššie. Pri ňom sa však na rozdiel od pôvodného postupu otočia všetky smery chodu výťahu, takže ak pôvodný postup viedol na poschodie p, nový postup povedie na poschodie $2^{t+1} - p$. Pomocou všetkých týchto nových postupov sa tak Samo môže dostať na každé z poschodí $2^{t+1} - 1, 2^{t+1} - 2, \ldots, 2^{t+1} - (2^t - 1)$, čo je $2^t + 1$, práve dvoma spôsobmi a navyše na poschodie $2^{t+1} - 2^t$ čiže 2^t práve jedným spôsobom.
- Ak Samo stlačí len tlačidlo $t + 1$, dostane sa na poschodie 2^{t+1}.

Celkovo sme dokázali, že Samo sa môže dostať práve dvoma spôsobmi na každé z poschodí $1, \ldots, 2^t - 1$ (prvý prípad), 2^t (prvé dva prípady), $2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1$ (druhý prípad) a navyše práve jedným spôsobom na poschodie 2^{t+1} (tretí prípad).

Tým je dôkaz matematickou indukciou ukončený.

Poznámka:

Možných domnienok, ktoré možno odpozorovať a následne dokázať matematickou indukciou, je viac. Napríklad: *Ak Samo začne stlačením tlačidla t, kde* $t \geq 1$, *môže sa dostať na každé z poschodí* 2^{t-1} *a* 2^t *práve jedným spôsobom a navyše na každé z poschodí* $2^{t-1} + 1, \ldots, 2^t - 1$ *práve dvoma spôsobmi.*.

Riešenie 2:

V tomto riešení budeme pracovať so zápismi čísel v dvojkovej sústave.

Najskôr rozoberme prípad, keď Samo stlačí dokopy *párny* počet tlačidiel, teda po poslednom stlačení výťah pôjde nadol. Konkrétne po stlačení $2k$ tlačidiel postupne s číslami $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, pričom podľa zadania $a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > a_k > b_k$, skončí výťah na poschodí s číslom n, kde

$$n = \left(2^{a_1} - 2^{b_1}\right) + \cdots + \left(2^{a_k} - 2^{b_k}\right).$$

Pozrime sa na zápis tohto čísla v dvojkovej sústave. Platí

$$2^{a_i} - 2^{b_i} = 2^{a_i - 1} + 2^{a_i - 2} + \cdots + 2^{b_i},$$

takže ide o číslo, ktoré má v dvojkovej sústave jednotky práve na pozíciách b_i až $a_i - 1$. V zápise čísla n tak všetky jednotky vytvoria k súvislých úsekov s pozíciami $(a_1 - 1, \ldots, b_1)$, $(a_2 - 1, \ldots, b_2)$, ..., $(a_k - 1, \ldots, b_k)$. Pritom každé dva tieto susedné úseky budú oddelené aspoň jednou nulou, lebo medzi pozíciami b_i a $a_{i+1} - 1$ je vždy aspoň pozícia a_{i+1}. Ak teda Samo má stlačiť párny počet tlačidiel, môže sa na dané poschodie n, kde $n \geq 1$, dostať vždy práve jedným spôsobom: Číslo n zapíše v dvojkovej sústave, v zápise nájde čo najdlhšie súvislé úseky jednotiek zľava postupne $(a_1 - 1, \ldots, b_1)$, $(a_2 - 1, \ldots, b_2)$, ..., $(a_k - 1, \ldots, b_k)$. a postupne stlačí tlačidlá $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$. Napríklad pre poschodie 58 čiže $(111010)_2$ takto nájde dva úseky $(5, 4, 3)$ a (1), takže $a_1 = 6$, $b_1 = 3$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, a potom postupom (a_1, b_1, a_2, b_2) čiže $(6, 3, 2, 1)$ sa naozaj dostane na poschodie $2^6 - 2^3 + 2^2 - 2^1$ čiže 58.

Podobne v druhom prípade, keď Samo stlačí *nepárny* počet tlačidiel, povedzme s číslami $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, a_{k+1}$, pričom podľa zadania $a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > a_k > b_k > A_{k+1}$, skončí na poschodí s číslom n, kde

$n = \sum_{i=1}^{k} \left(2^{a_i} - 2^{b_i}\right) + 2^{a_{k+1}}$, ktoré má v dvojkovej sústave jednotky na úsekoch pozícií $(a_i - 1, \dots b_i)$ a na pozícii a_{k+1} (všade inde má nuly, menovite aspoň jednu medzi každými dvoma susednými úsekmi jednotiek z prvých k úsekov). Každé n, kde $n \geq 1$, je možné v uvedenom tvare zapísať práve jedným spôsobom – ako a_{k+1} musí Samo zvoliť pozíciu prvej jednotky sprava v dvojkovom zápise čísla n, túto jednotku prepíše na nulu a ďalej už postupuje ako vyššie v prípade párneho počtu tlačidiel. Aj tu je teda práve jeden možný postup. Napríklad pre poschodie 58 čiže $(111010)_2$ Samo prepíše na nulu jednotku na pozícii 1, nájde jediný úsek jednotiek $(5, 4, 3)$, takže $k = 1$ a $a_{k+1} = 1$, a potom sa postupom (a_1, b_1, a_2) čiže $(6, 3, 1)$ naozaj dostane na poschodie $2^6 - 2^3 + 2^1$ čiže 58.

Poznámka:

Z tohto riešenia vyplýva, že dva možné postupy, akými sa Samo dostane na poschodie s daným číslom n, končia stlačením toho istého tlačidla a, raz pre pohyb o 2^a poschodí nahor, druhýkrát pre taký pohyb nadol. Navyše platí, že 2^a je najväčšia mocnina 2, ktorá dané číslo n delí. Odtiaľ vyplýva, že oba postupy pre dané n je možné postupne konštruovať „odzadu“ bez toho, aby sme vopred určili dvojkový zápis čísla n. Napríklad pre číslo 58, ktoré je deliteľné 2^1, nie však 2^2, celá konštrukcia pre nepárny počet stlačení tlačidiel (posledný pohyb bude o 2^1 poschodí nahor) bude vyzerať takto: 58, $58 - 2^1$ čiže 56, $56 + 2^3$ čiže 64, $64 - 2^6$ čiže 0 a pre párny počet stlačení tlačidiel bude mať tvar 58, $58 + 2^1$ čiže 60, $60 - 2^2$ čiže 56, $56 + 2^3$ čiže 64, $64 - 2^6$ čiže 0. Hľadané skupiny tlačidiel teda sú $(6, 3, 1)$ a $(6, 3, 2, 1)$.

Dodajme, že túto poznámku nemožno považovať za úplné riešenie – napríklad by ešte bolo potrebné zdôvodniť, že použitím uvedeného postupu „odzadu“ nikdy nezájdeme do podzemia a že po konečne veľa krokoch naozaj dôjdeme na prízemie.

Prvé tvrdenie je možné zdôvodniť napríklad tak, že z ktoréhokoľvek poschodia s kladným číslom $2^i \cdot l$, kde l je nepárne číslo, sa pohneme len o 2^i poschodí, teda skončíme na poschodí s číslom aspoň $2^i \cdot l - 2^i$, čo je aspoň $2^i - 2^i$ čiže 0. Druhé tvrdenie je možné zdôvodniť rôznymi spôsobmi – napríklad je možné indukciou dokázať, že ak začíname konštrukciu odzadu na poschodí n a platí $n < 2^k$, tak nikdy nenavštívime poschodie s číslom väčším ako 2^k. Z toho potom vyplýva požadované tvrdenie. Keďže sa totiž v každom kroku posunieme o viac poschodí než v predchádzajúcom kroku, po konečnom počte krokov takto dôjdeme buď na prízemie, alebo na poschodie s číslom 2^k (a z neho následne na prízemie).

Riešenie 3:

Postláčané čísla tvoria všade klesajúcu postupnosť prirodzených čísel. Ak je to $(a_1 \dots, a_k)$, tak výťah stúpne z prízemia na n. poschodie, práve keď

$$n = 2^{a_1} - 2^{a_2} + \cdots + (-1)^{k+1} 2^{a_k}.$$

Množinu všetkých všade klesajúcich postupností prirodzených čísel označme $\mathcal{K}$. Na tejto množine definujme funkciu f tak, že

$$f\left((b_1, \dots, b_k)\right) = 2^{b_1} - 2^{b_2} + \cdots + (-1)^{k+1} 2^{b_k}.$$

Ukážeme, že obor hodnôt funkcie f je množina všetkých prirodzených čísel, pričom každá hodnota okrem 0 sa vyskytne práve 2-krát.

Platí $f\left(()\right) = 0$, a ak $(b_1, \dots b_k) \in \mathcal{K}$, kde k je kladné prirodzené číslo, tak platí

$$f\left((b_1, \dots b_k)\right) = 2^{b_1} - 2^{b_2} + \cdots + (-1)^{k+1} 2^{b_k} \geq 2^{b_1} - 2^{b_2} - \cdots - 2^{b_k} = 2^{b_1} - \left(2^{b_k} + \cdots + 2^{b_2}\right)$$

$$\geq 2^{b_1} - \left(2^0 + \cdots + 2^{b_1 - 1}\right) = 2^{b_1} - \frac{2^{b_1} - 1}{2 - 1} = 2^{b_1} - \frac{2^{b_1} - 1}{1} = 2^{b_1} - \left(2^{b_1} - 1\right) = 1 > 0.$$

Hodnoty f sú teda prirodzené čísla.

Ak $(b_1, \dots b_k, c_1, \dots, c_p) \in \mathcal{K}$, tak $(b_1, \dots b_k), (c_1, \dots, c_p) \in \mathcal{K}$ a

$$\begin{aligned} & f\left((b_1, \dots b_k, c_1, \dots, c_p)\right) \\ &= 2^{b_1} - 2^{b_2} + \cdots + (-1)^{k+1} 2^{b_k} + (-1)^{k+2} c_1 + (-1)^{k+3} c_2 + \cdots + (-1)^{k+p+1} c_p \\ &= \left(2^{b_1} - 2^{b_2} + \cdots + (-1)^{k+1} 2^{b_k}\right) + (-1)^k \left(2^{c_1} - 2^{c_2} + \cdots + (-1)^{k+1} 2^{b_k}\right) \\ &= f\left((b_1, \dots b_k)\right) + (-1)^{k+1} f\left((c_1, \dots, c_p)\right), \end{aligned}$$

čo je v prípade $p > 0$ rôzne od $f\left((b_1, \dots b_k)\right)$.

Špeciálne teda

$$f\left((b_1, c_1, \dots, c_p)\right) = f\left((b_1)\right) - f\left((c_1, \dots, c_p)\right) \leq f\left((b_1)\right),$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $p = 0$, a

$$f\left((b_1, b_2, c_1, \dots, c_p)\right) = f\left((b_1, b_2)\right) + f\left((c_1, \dots, c_p)\right) \geq f\left((b_1, b_2)\right),$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $p = 0$.

Ukážeme, ktoré rôzne postupnosti majú rovnaké hodnoty: Nech $(b_1, \dots b_k, c_1, \dots, c_p)$ a $(b_1, \dots b_k, d_1, \dots, d_q)$ sú rôzne prvky $\mathcal{K}$ a nech

$$f\left((b_1, \dots b_k, c_1, \dots, c_p)\right) = f\left((b_1, \dots b_k, d_1, \dots, d_q)\right).$$

Podľa vyššie dokázanej vlastnosti sú potom p a q kladné. Bez ujmy na všeobecnosti nech $c_1 > d_1$, t. j. $c_1 \geq d_1 + 1$. Potom ekvivalentne

$$\begin{aligned} f\left((b_1, \dots b_k)\right) + (-1)^k f\left((c_1, \dots, c_p)\right) &= f\left((b_1, \dots b_k)\right) + (-1)^k f\left((d_1, \dots, d_q)\right), \\ (-1)^k f\left((c_1, \dots, c_p)\right) &= (-1)^k f\left((d_1, \dots, d_q)\right), \\ f\left((c_1, \dots, c_p)\right) &= f\left((d_1, \dots, d_q)\right). \end{aligned}$$

Rozoberme prípady:

- Nech $p = 1$.

  Potom

  $$2^{c_1} = f\left((d_1, \dots, d_q)\right) \leq f\left((d_1)\right) = 2^{d_1} \leq 2^{c_1 - 1} < 2^{c_1},$$

  čo je spor.

  Tento prípad teda nenastáva.

- Nech $p \geq 2$.

  Potom

  $$2^{c_1-1} = 2^{c_1} - 2^{c_1-1} \leq 2^{c_1} - 2^{c_2} = f\left((c_1, c_2)\right) \leq f\left((c_1, \dots, c_p)\right) = f\left((d_1, \dots, d_q)\right) \leq f\left((d_1)\right) = 2^{d_1} \leq 2^{c_1-1},$$

  takže vo všetkých čiastkových nerovnostiach nastáva rovnosť, a teda $p = 2$, $q = 1$ a $d_1 = c_2 = c_1 - 1$.

To znamená, že ak pre nejaké kladné prirodzené číslo n existuje nejaká postupnosť z $\mathcal{K}$, v ktorej má f hodnotu n, tak také existujú práve dve a majú tvary $(b_1, \dots b_k, c_1, c_1 - 1)$ a $(b_1, \dots b_k, c_1 - 1)$ pre nejaké kladné prirodzené čísla b_1, …, b_n a c_1. Vtedy naozaj platí

$$\begin{aligned} f\left((b_1, \dots b_k, c_1, c_1 - 1)\right) &= f\left((b_1, \dots b_k)\right) + (-1)^k f\left((c_1, c_1 - 1)\right) = f\left((b_1, \dots b_k)\right) + (-1)^k \left(2^{c_1} - 2^{c_1-1}\right) \\ &= f\left((b_1, \dots b_k)\right) + (-1)^k 2^{c_1-1} = f\left((b_1, \dots b_k)\right) + (-1)^k f\left((c_1 - 1)\right) = f\left((b_1, \dots b_k, c_1 - 1)\right). \end{aligned}$$

Napokon indukciou ukážeme, že pre každé kladné prirodzené číslo n existuje postupnosť z $\mathcal{K}$, v ktorej má f hodnotu n, pričom jej prvý čiže najväčší prvok je najviac $\lceil \log_2 n \rceil$:

1) Nech $n = 2^t$, kde t je prirodzené číslo.

   Hľadaná postupnosť je potom (t).

2) Nech $2^t < n < 2^{t+1}$, kde t je prirodzené číslo.

   Nech $m = 2^{t+1} - n$, potom

   $$m < 2^{t+1} - 2^t = 2^t < n,$$

   takže $\lceil \log_2 m \rceil \leq t$ a podľa indukčného predpokladu existuje postupnosť $(c_1, \dots, c_p)$ z $\mathcal{K}$ taká, že $f\left((c_1, \dots c_p)\right) = m$ a $c_1 \leq \lceil \log_2 m \rceil \leq t < t + 1$. Potom aj postupnosť $(t + 1, c_1, \dots, c_p)$ patrí do $\mathcal{K}$ a platí

   $$f\left((t + 1, c_1, \dots, c_p)\right) = f\left((t + 1)\right) - f\left((c_1, \dots, c_p)\right) = 2^{t+1} - m = n.$$

Zhrnutím dostávame, že obor hodnôt funkcie f je množina všetkých prirodzených čísel, pričom každá hodnota okrem 0 sa nadobudne práve 2-krát.

To znamená, že pre každé kladné prirodzené číslo n existujú práve dva postupy stláčania tlačidiel také, že výťah sa dostane z prízemia na n. poschodie.

---

6 Označme J, K, L postupne stredy kružníc pripísaných stranám BC, CA, AB trojuholníka ABC. Priesečníky výšok trojuholníkov JBC, KCA, LAB označme postupne X, Y, Z. Dokážte, že trojuholníky ABC a XYZ sú zhodné.

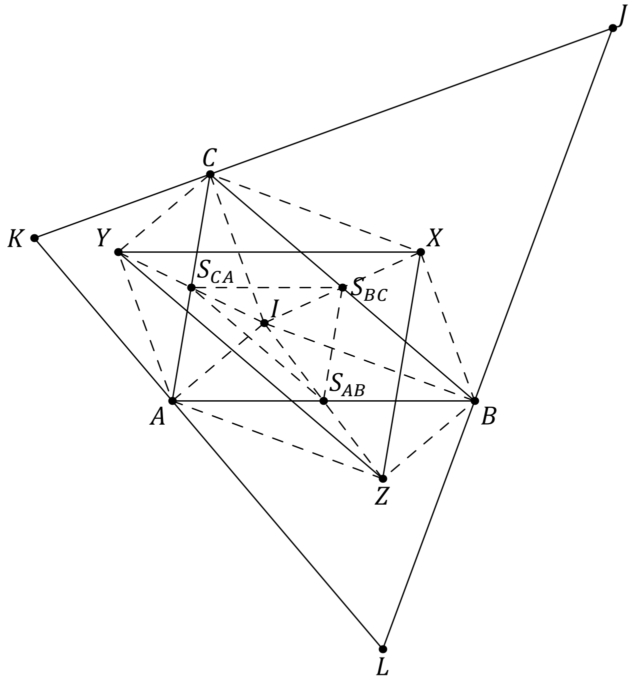
(Michal Janík)

Riešenie 1:

Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Priamky BI a BJ sú osami vnútorného a vonkajšieho uhla pri vrchole B trojuholníka ABC. Sú navzájom kolmé, pretože

$$|\sphericalangle IBJ| = |\sphericalangle IBC| + |\sphericalangle CBJ| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| + \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle ABC|) = 90^\circ.$$

Na spomínanú priamku BJ je však tiež kolmá priamka CX výšky z vrcholu C trojuholníka JBC. Priamky BI a CX sú teda rovnobežné. Podobne sú rovnobežné priamky CI a BX, teda štvoruholník $BICX$ je rovnobežník.



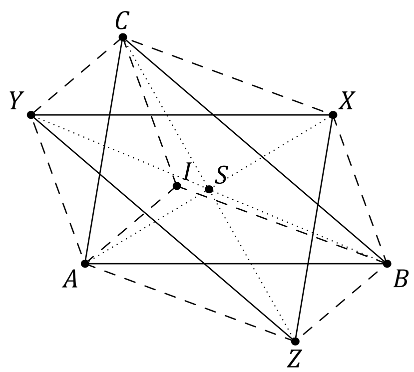
Uhlopriečky každého rovnobežníka sa navzájom rozpoľujú, takže stred úsečky IX splýva so stredom S_{BC} strany BC. Analogicky stredy úsečiek IY a IZ splývajú postupne so stredmi S_{CA}, resp. S_{AB} strán CA, resp. AB trojuholníka ABC. Trojuholník XYZ je preto obrazom trojuholníka $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ v rovnoľahlosti so stredom I a koeficientom 2. Keďže $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$ je podobný trojuholníku ABC s koeficientom podobnosti 1/2, je (dvakrát väčší) trojuholník XYZ s trojuholníkom ABC zhodný.

Riešenie 2:

Ukážeme iný spôsob ako dokončiť riešenie po zistení, že štvoruholník $BICX$ je rovnobežník.

Analogicky ako v prvom riešení sa dokáže, že aj štvoruholníky $CIAY$ a $AIBZ$ sú rovnobežníky. Úsečky BZ a CY sú teda zhodné a rovnobežné, každá z nich je totiž zhodná a rovnobežná s úsečkou IA. Štvoruholník $BCYZ$ je teda rovnobežník, takže jeho uhlopriečky AX a BY majú spoločný stred. Označme ho S.

Analogicky majú spoločný stred aj úsečky BY a CZ, všetky tri úsečky AX, BY, CZ teda majú spoločný stred S. Trojuholníky ABC a XYZ sú preto podľa tohto bodu súmerné, takže sú zhodné.



Poznámka:

Ukážeme, že priesečník S priamok AX, BY, CZ je stred kružnice vpísanej trojuholníku $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$.

Označme L stred kružnice vpísanej trojuholníku $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$, stačí teda dokázať, že L je stred S úsečky AX. Keďže $BICX$ je rovnobežník, S_{BC} je stredom úsečky IX. Rovnoľahlosť s koeficientom $-1/2$, ktorá zobrazí ABC na $S_{BC}S_{CA}S_{AB}$, zobrazí úsečku AI na úsečku $S_{BC}L$, takže $\overrightarrow{S_{BC}L} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$. Keďže S_{BC} je stred strany IX trojuholníka AIX, je $S_{BC}L$ jeho stredná priečka a bod L je tak stredom jeho strany AX.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024