MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh školského kola kategórie A

1 Rozhodnite, či existujú navzájom rôzne reálne čísla a, b, c také, že čísla a^2+b, b^2+c, c^2+a sa v nejakom poradí rovnajú číslam $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Dokážeme, že takéto čísla neexistujú.

Existuje 3! čiže 6 možností zostavenia sústavy troch rovníc, ktoré majú na ľavých stranách výrazy a^2+b, b^2+c, c^2+a a na pravých stranách výrazy $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$. Ak by bol v niektorej zostavenej rovnici na oboch stranách ten istý kvadratický člen, (napríklad ak $a^2+b=c+a^2$, tak $b=c$), čo zadanie nedovoľuje. Takže do úvahy prichádzajú len dve sústavy, každá z nich je určená tým, ktorý z možných výrazov $a+b^2$, $b+c^2$ tvorí pár s výrazom a^2+b:

- Prvá sústava je

$$a^2+b=a+b^2,$$
$$b^2+c=b+c^2,$$
$$c^2+a=c+a^2.$$

  Prvú rovnicu ekvivalentne upravíme na $(a-b)(a+b-1)=0$, takže vzhľadom na predpoklad $a\neq b$ musí platiť $a+b=1$.

  Podobne z druhej rovnice dostaneme $b+c=1$, teda spolu $a=1-b=c$. Sústava preto nemá žiadne riešenie s navzájom rôznymi číslami a, b, c.

- Druhá sústava je

$$a^2+b=b+c^2,$$
$$b^2+c=c+a^2,$$
$$c^2+a=a+b^2.$$

  Z $a^2+b=b+c^2$ vyplýva $a^2=c^2$, z čoho vzhľadom na $a\neq c$ vyplýva $c=-a$.

  Podobne z rovnice $b^2+c=c+a^2$ vyplýva $b=-a$. Spolu máme $b=c$, teda ani táto sústava nemá riešenie s požadovanou vlastnosťou.

Poznámka:

V riešení sme vlastne ukázali, že ak sa čísla a^2+b, b^2+c, c^2+a v nejakom poradí rovnajú číslam $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$, tak niektoré dve z čísel a, b, c musia byť rovnaké. Ľahko sa dá overiť, že platí aj opačná implikácia – ak sa rovnajú niektoré dve z čísel a, b, c, tak sa (v nejakom poradí) rovnajú aj čísla a^2+b, b^2+c, c^2+a číslam $a+b^2$, $b+c^2$, $c+a^2$. (Napríklad v prípade $b=a$ sú obe trojice tvorené číslami a^2+a, a^2+c, c^2+a.)

Riešenie 2:

Predpokladajme, že určité čísla a, b, c podmienky zadania spĺňajú. Rozoberieme tri prípady podľa toho, čomu sa rovná číslo a^2+b:

- Nech $a^2+b=a+b^2$.

  Z toho ekvivalentne dostaneme $(a-b)(a+b-1)=0$, takže $a=b$ alebo $a+b=1$. Prvý prípad neprichádza do úvahy, pretože čísla a a b sú zo zadania rôzne. Takže v tomto prípade musí platiť $a+b=1$.

- Nech $a^2+b=b+c^2$.

  Z toho ekvivalentne dostaneme $(a-c)(a+c)=0$. Podľa zadania však $a-c\neq 0$, takže v tomto prípade musí platiť $a+c=0$.

- Nech $a^2+b=c+a^2$.

  Z toho ekvivalentne dostaneme $b=c$, čo však zadanie vylučuje. Tento prípad teda nemôže nastať.

Celkovo nám vyšlo, že vždy musí platiť $a + b = 1$ alebo $a + c = 0$.

Podobne rozobratím prípadov podľa toho, čomu sa rovná číslo $b^2 + c$, zistíme, že musí platiť $b + c = 1$ alebo $b + a = 0$. A podobne musí tiež platiť $c + a = 1$ alebo $c + b = 0$.

Každý z troch súčtov $a + b$, $b + c$, $c + a$ je teda rovný buď 0, alebo 1. Aspoň dva súčty preto musia mať rovnakú hodnotu. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to súčty $a + b$ a $b + c$. Potom $a = c$, čo je spor s predpokladom, že všetky tri čísla a, b, c sú rôzne.

Žiadna vyhovujúca trojica (a, b, c) teda nevyhovuje.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky z vyššie popísaných postupov nasledovne:

- A. Správna odpoveď (aj bez zdôvodnenia): 1 bod.
- B. Zdôvodnenie, že navzájom rôzne čísla a, b, c musia spĺňať takú sústavu rovníc, v ktorej sú všetky tri rovnice buď typu $x^2 + y = x + y^2$, alebo typu $x^2 + y = y + z^2$: 2 body.
- C1. Vyriešenie sústavy, v ktorej sú všetky tri rovnice typu $x^2 + y = x + y^2$: 2 body
- C2. Vyriešenie sústavy, v ktorej sú všetky tri rovnice typu $x^2 + y = y + z^2$: 2 body
- D1. Zdôvodnenie, že z $x^2 + y = x + y^2$ vyplýva $x = y$ alebo $x + y = 1$ (možno sa aj odvolať na výsledok z domáceho kola): 1 bod.
- D2. Zdôvodnenie, že z $x^2 + y = y + z^2$ vyplýva $x = z$ alebo $x = -z$: 1 bod.

Celkovo potom za neúplné riešenie dajte najväčšiu z týchto hodnôt:

- počet bodov za A,
- súčet počtov bodov za B, C1 a C2,
- súčet počtov bodov za B, D1 a D2.

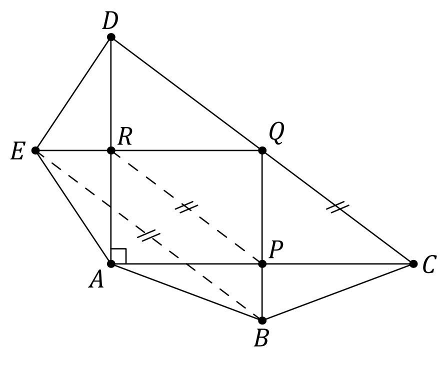
---

2 Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník taký, že $|AB| = |CB|$, $|AE| = |DE|$, $AC \perp AD$ a $CD \parallel BE$. Dokážte, že trojuholníky ABC a AED majú rovnaké obsahy.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Trojuholník ACD má podľa zadania pravý uhol DAC. Označme P, Q, R postupne stredy jeho strán AC, CD, DA. Keďže PQ je stredná priečka trojuholníka ACD, platí $|PQ| = \frac{1}{2}|AD|$ a $PQ \parallel AD$, čo vzhľadom na $AD \perp AC$ znamená aj $PQ \perp AC$, a preto je priamka PQ osou strany AC, na ktorej navyše vďaka podmienke $|AB| = |BC|$ leží aj vrchol B. Podobne stredná priečka QR má dĺžku $\frac{1}{2}|AC|$ a priamka QR je osou strany AD, na ktorej podľa zadania leží aj vrchol E.



Keďže $CD \parallel BE$ a stredná priečka PR je rovnobežná so stranou CD, platí tiež $PR \parallel BE$. Podľa vety *uu* tak sú trojuholníky BQE a PQR podobné, a preto platí

$$\frac{|BP|}{\frac{1}{2}|AD|} + 1 = \frac{|BP|}{|PQ|} + 1 = \frac{|BP| + |PQ|}{|PQ|} = \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{|EQ|}{|RQ|} = \frac{|ER| + |RQ|}{|RQ|} = \frac{|ER|}{|RQ|} + 1 = \frac{|ER|}{\frac{1}{2}|AC|} + 1.$$

Z porovnania oboch krajných výrazov vyplýva

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BP| = \frac{1}{2}|AD| \cdot |RE|,$$

t. j. $S(ABC) = S(AED)$.

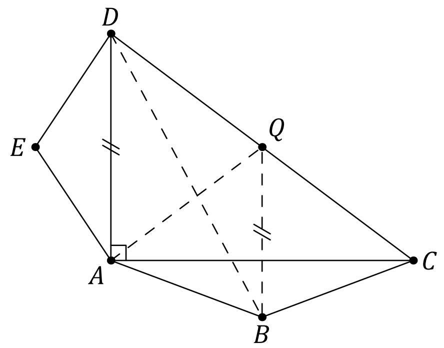
Poznámka:

Úvahy o stredných priečkach možno motivovať nasledovne. Na vyjadrenie obsahov rovnoramenných trojuholníkov ABC a AED využijeme ich výšku ležiacu na osiach základní AC, resp. AD. Sú to súčasne osi odvesien pravouhlého trojuholníka ACD, takže sa pretínajú v strede jemu opísanej kružnice, ktorým je stred jeho prepony CD.

Riešenie 2:

Nech Q je stred strany CD. Rovnako ako v prvom riešení ukážeme, že bod B leží na priamke strednej priečky trojuholníka ACD rovnobežnej so stranou AD. Preto platí

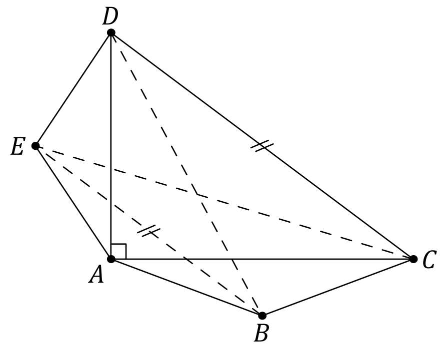
$$\mathrm{S}(ABD) = \mathrm{S}(ABQ) = \frac{1}{2}\mathrm{S}(ACD).$$



Z dvojakého vyjadrenia obsahu štvoruholníka $ABCD$ v tvare $\mathrm{S}(ABC){+}\mathrm{S}(ACD) = \mathrm{S}(BCD){+}\mathrm{S}(ABD)$ tak vychádza

$$\mathrm{S}(ABC) = \mathrm{S}(BCD) + \mathrm{S}(BCD) - \mathrm{S}(ACD) = \mathrm{S}(BCD) + \frac{1}{2}\mathrm{S}(ACD) - \mathrm{S}(ACD) = \mathrm{S}(BCD) - \frac{1}{2}\mathrm{S}(ACD).$$

Úplne analogickou úvahou pre štvoruholník $ACDE$ odvodíme vzťah $\mathrm{S}(AED) = \mathrm{S}(ECD) - \frac{1}{2}\mathrm{S}(ACD)$. Požadovaný záver $\mathrm{S}(ABC) = \mathrm{S}(AED)$ tak bude dokázaný, ak overíme rovnosť $\mathrm{S}(BCD) = \mathrm{S}(ECD)$. Tá však vyplýva z podmienky $CD \parallel BE$, pretože trojuholníky BCD a ECD majú spoločnú stranu CD a zhodnú príslušnú výšku.



Riešenie 3:

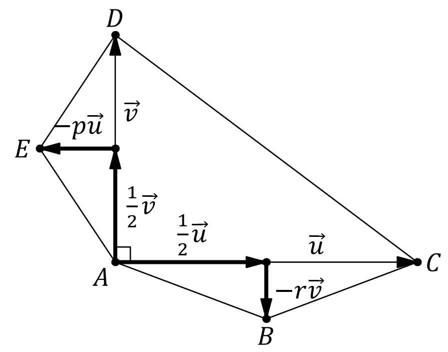
Nech $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, podľa zadania sú tieto vektory navzájom kolmé. Vďaka tomu pre vhodné kladné čísla r a p platia rovnosti

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{u} - r\vec{v}$$

a

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{v} - p\vec{u}.$$

Význam čísel r a p je jasný: V rovnoramennom trojuholníku ABC je $r\,|\vec{v}|$ dĺžka výšky na základňu AC dĺžky $|\vec{u}|$, teda navyše platí $\mathrm{S}(ABC) = \frac{1}{2}r \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Podobne je to s významom čísla p, ktorý vedie k rovnosti $\mathrm{S}(AED) = \frac{1}{2}p \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.



Potrebujeme tak dokázať rovnosť $r = p$. Odvodíme ju zo zadanej podmienky $CD \parallel BE$. Keďže $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{v} - \vec{u}$, platí

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}\vec{v} - p\vec{u}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{u} - r\vec{v}\right) = \left(\frac{1}{2} + r\right)(\vec{v} - \vec{u}) + (r - p)\vec{u} = \left(\frac{1}{2} + r\right)\overrightarrow{CD} + (r - p)\vec{u}.$$

Vektory $\overrightarrow{BE}$ a $\overrightarrow{CD}$ sú rovnobežné a vektor $\vec{u}$ je s nimi rôznobežný. Aby platila rovnosť, musí byť vektor $(r - p)\vec{u}$ nulový. Teda $r = p$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky z vyššie popísaných postupov nasledovne:

- A. Dokreslenie stredov aspoň dvoch strán trojuholníka ACD (body P, Q, R v prvom riešení): 1 bod.
- B1. Zdôvodnenie, že body B, P, Q (alebo analogicky E, R, Q) ležia na rovnakej priamke: 2 body.
- B2. Zdôvodnenie, že trojuholníky BQE a PQR sú podobné: 2 body.
- C1. Zdôvodnenie, že $\mathrm{S}(ABD) = \frac{1}{2}\mathrm{S}(ACD)$ (alebo analogicky pre E): 2 body.
- C2. Zdôvodnenie, že $\mathrm{S}(BCD) = \mathrm{S}(ECD)$: 1 bod.

Celkovo potom za neúplné riešenie dajte najväčšiu z týchto hodnôt:

- počet bodov za A,
- súčet počtov bodov za B1 a B2,
- súčet počtov bodov za C1 a C2.

---

3 Povieme, že prirodzené číslo je *ploché*, keď sú všetky jeho cifry rovnaké. (Aj jednociferné čísla považujeme za ploché.) Rozhodnite, či sa dá každé prirodzené číslo, ktoré nie je ploché, vyjadriť ako súčet niekoľkých navzájom rôznych plochých čísel.

(Jozef Rajník)

Riešenie 1:

Aj prirodzené číslo 0 je ploché, jeho prítomnosť v uvažovaných súčtoch je však nepodstatná. Budeme preto pracovať len s kladnými plochými číslami.

Označme J_n číslo zložené z n cifier 1, teda $J_1 = 1$, $J_2 = 11$, $J_3 = 111$ a tak ďalej. Potom n-ciferné kladné ploché čísla sú práve čísla J_n, $2J_n$, ..., $9J_n$ a najmenšie $(n + 1)$-ciferné ploché číslo je J_{n+1}, kde

$$J_{n+1} = \underbrace{1\ldots1}_{(n+1)\text{-krát}} = \underbrace{1\ldots1}_{n\text{-krát}}0 + 1 = 10J_n + 1.$$

Nech m je ľubovoľné kladné prirodzené číslo, máme za úlohu vyjadriť m ako súčet navzájom rôznych plochých čísel. Vhodné ploché čísla hľadáme postupne. Najskôr nájdeme *najväčšie* ploché číslo, ktoré je menšie alebo rovnaké ako m (aspoň jedno takéto ploché číslo určite existuje, pretože $J_1 = 1$). Predpokladajme, že týmto najväčším číslom je dJ_k, pričom $d \in \{1, \ldots, 9\}$. Ak $m = dJ_k$, tvrdenie je dokázané. V opačnom prípade zostáva vyjadriť číslo $m - dJ_k$, čo urobíme analogicky tak, že nájdeme najväčšie ploché číslo, ktoré je menšie alebo rovné $m - dJ_k$, a tak ďalej. Rozdiely, ktoré zostáva vyjadriť, nadobúdajú prirodzené hodnoty a stále sa zmenšujú, takže po konečne veľa krokoch takto vyjadríme m ako súčet niekoľkých plochých čísel.

Musíme ešte zdôvodniť, že takto vybrané ploché čísla sú navzájom rôzne. Na to stačí dokázať, že prvé vybrané číslo dJ_k spĺňa $dJ_k > \frac{1}{2}m$. Potom totiž bude každé vybrané číslo väčšie ako súčet všetkých plochých čísel vybraných neskôr, takže špeciálne budú každé dve vybrané ploché čísla rôzne.

Na dôkaz nerovnosti $dJ_k > \frac{1}{2}m$ rozlíšime dva prípady:

- Ak $d \in \{1, \dots, 8\}$, tak $m < (d+1)J_k$, pretože inak by sme ako najväčšie ploché číslo vzali číslo $(d+1)J_k$, prípadne nejaké ešte väčšie ploché číslo. Spojením so zrejmou nerovnosťou $(d+1)J_k \le 2dJ_k$ dostávame $m < (d+1)J_k \le 2dJ_k$, teda $dJ_k > \frac{1}{2}m$.
- Ak $d = 9$, tak podobne ako v predchádzajúcom prípade platí $m < J_{k+1}$. Keďže $J_{k+1} = 10J_k + 1 < 2 \cdot (9J_k)$, platí aj $m < J_{k+1} \le 2 \cdot (9J_k)$, teda $9J_k > \frac{1}{2}m$.

Odpoveď na otázku zo zadania je teda pozitívna.

Poznámka:

Kladnú odpoveď zo zadania možno zovšeobecniť na takéto platné tvrdenie:

Nech $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ je nekonečná všade rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že $a_0 = 1$ a $a_{i+1} \le 2a_i$ pre každé prirodzené číslo i. Potom každé prirodzené číslo n je možné vyjadriť ako súčet niektorých navzájom rôznych členov postupnosti $(a_i)_{i=0}^{\infty}$.

Špeciálne prípad, keď $a_0 = 1$ a $a_{i+1} = 2a_i$ pre každé prirodzené číslo i, t. j. keď $a_i = 2^i$, znamená, že každé kladné prirodzené číslo možno vyjadriť ako súčet niektorých mocnín čísla 2, t. j. v binárnom zápise. Jeho cifra 1 na i. mieste sprava totiž vyjadruje prítomnosť čísla 2^{i-1} čiže a_{i-1} v takomto súčte a 0 jeho neprítomnosť.

Riešenie 2:

Označme J_n číslo zložené z n cifier 1. Potom $J_{n+1} = 10J_n + 1$.

Pre kladné prirodzené číslo n uvažujme tvrdenie $T(n)$:

Každé prirodzené číslo menšie ako J_{n+1} sa dá vyjadriť ako súčet niekoľkých navzájom rôznych nanajvýš n--ciferných plochých čísel.

Matematickou indukciou dokážeme, že tvrdenie $T(n)$ platí pre každé kladné prirodzené číslo n. Tým bude úloha vyriešená.

1. Aby sme dokázali platnosť $T(1)$, stačí vyjadriť všetky prirodzené čísla menšie ako J_2 čiže 11: Čísla 0, 1, ..., 9 sú samy ploché a číslo 10 môžeme vyjadriť napríklad ako $9 + 1$. Teda tvrdenie $T(1)$ platí.
2. Predpokladajme ďalej, že pre nejaké kladné prirodzené číslo n platí tvrdenie $T(n)$. Dokážeme, že potom platí aj tvrdenie $T(n+1)$. Máme teda vyjadriť čísla 0, 1, ..., $J_{n+2} - 1$ pomocou navzájom rôznych nanajvýš $(n+1)$-ciferných plochých čísel. Rozlíšime štyri prípady:
   - Čísla 0, 1, ..., $J_{n+1} - 1$ sa dajú podľa indukčného predpokladu takto vyjadriť dokonca pomocou nanajvýš n-ciferných plochých čísel.
   - Čísla J_{n+1}, $2J_{n+1}$, ..., $9J_{n+1}$ sú samy ploché.
   - Nech $i \in \{1, \dots, 9\}$, potom dokážeme vyjadriť každé číslo tvaru $iJ_{n+1} + z$, kde $1 \le z \le J_{n+1} - 1$, nasledovne: Číslo z vyjadríme podľa indukčného predpokladu ako súčet niekoľkých navzájom rôznych nanajvýš n-ciferných plochých čísel a k tomuto súčtu pridáme ploché číslo iJ_{n+1}, ktoré je rôzne od ostatných sčítancov, pretože má $n + 1$ cifier. Tým sme našli požadované vyjadrenia všetkých prirodzených čísel až po číslo $9J_{n+1} + (J_{n+1} - 1)$ čiže $10J_{n+1} - 1$.
   - Číslo $J_{n+1} - 1$ čiže $10J_{n+1}$ je súčtom dvoch rôznych $(n+1)$-ciferných plochých čísel $9J_{n+1}$ a J_{n+1}.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky z vyššie popísaných postupov nasledovne:

- A1. Dôkaz $J_{n+1} = 10J_n + 1$, pričom J_n, resp. J_{n+1} sú najmenšie n- a $(n+1)$-ciferné ploché čísla: 1 bod
- A2. Uvažovanie najväčšieho plochého čísla neprevyšujúceho vyjadrované číslo m: 1 bod.
- B1. Opis fungujúceho postupu, napr. ako v prvom riešení (bez zdôvodnenia jeho správnosti): 2 body.
- B2. Dôkaz $p_{k+1} \le 2p_k$, pričom $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ je rastúca postupnosť všetkých plochých čísel: 2 body
- B3. Dôkaz správnosti opísaného postupu (použité čísla sú ploché a navzájom rôzne): 4 body
- C. Takmer úplný dôkaz indukciou, ktorý zabúda len na prípad $m = 10J_n$: 5 bodov

Celkovo potom za neúplné riešenie dajte najväčšiu z týchto hodnôt:

- súčet počtov bodov za A1 a A2,
- súčet počtov bodov za B1 a B2,
- súčet počtov bodov za B1 a B3,
- počet bodov za C.

Slovenská komisia MO, ÚI PF UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

Redakčná úprava: Peter Novotný, Stanislav Krajči

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže