MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5

1 Čapkovci majú dvoch synov, Karola a o dva roky staršieho Petra. Nemcovci majú dcéru Boženu. Všetky tri deti majú narodeniny v ten istý deň a obe rodiny ich vtedy oslavujú spoločne. Pri tohtoročnej oslave bola Božena trikrát staršia ako Karol. O tri roky budú mať Karol a Peter spolu toľko rokov ako Božena.

Koľko rokov mali deti pri tohtoročnej oslave?

(Michaela Petrová)

Riešenie 1:

O 3 roky bude súčet vekov Karola a Petra o $2 \cdot 3$ čiže 6 rokov väčší ako teraz a vek Boženy sa zväčší o 3 roky. Pretože tieto hodnoty byť rovnaké, má práve teraz Božena o 3 roky viac ako súčet vekov oboch chlapcov.

Peter je o 2 roky starší ako Karol, teda súčet ich vekov je rovnaký ako 2-násobok veku Karola zväčšený o 2 roky. Celkovo sa teda vek Boženy dá vyjadriť ako 2-násobok veku Karola zväčený o $3 + 2$ čiže 5 rokov.

Zo zadania tiež vieme, že Božena je 3-krát staršia ako Karol. Porovnaním týchto dvoch vyjadrení dostávame, že Karol má 5 rokov, a teda Peter má 7 a Božena 15.

O 3 roky bude mať Karol $5 + 3$ čiže 8, Peter $7 + 3$ čiže 10 a Božena $15 + 3$ čiže 18, takže Karol a Peter budú mať spolu naozaj toľko rokov ako Božena.

Riešenie 2:

Vzhľadom na rôzne veky Karola môžeme vyjadriť ostatné veky teraz a o 3 roky:

Karol	0	1	2	3	4	5	6	...
Peter	2	3	4	5	6	7	8	...
Božena	0	3	6	9	12	15	18	...
Karol o 3 roky	3	4	5	6	7	8	9	...
Peter o 3 roky	5	6	7	8	9	10	11	...
Karol a Peter o 3 roky spolu	8	10	12	14	16	18	20	...
Božena o 3 roky	3	6	9	12	15	18	21	...

Keď má Karol 5 rokov, oba čísla v posledných dvoch riadkoch sa rovnajú, je to teda riešenie.

Pretože čísla v predposlednom riadku stúpajú po 2 a v poslednom riadku po 3, toto riešenie je jediné.

Karol má 5 rokov, Peter 7 a Božena 15.

Riešenie 3:

Súčasný vek Boženy označme b, Petra p a Karola k. Podľa zadania platí $p = k + 2$ a $b = 3k$. O 3 roky budú ich veky $b + 3$, $p + 3$, $k + 3$, takže podľa zadania

$$(b + 3) = (p + 3) + (k + 3),$$

čiže

$$b = p + k + 3.$$

Z toho

$$3k = (k + 2) + k + 3,$$

$$3k - k - k = 2 + 3,$$

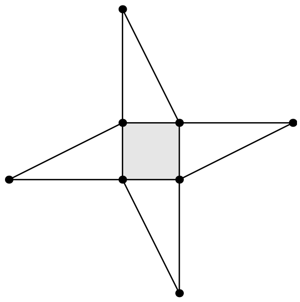
$$k = 5.$$

Karol má teda 5 rokov, takže Peter má $5 + 2$ čiže 7 a Božena $3 \cdot 5$ čiže 15. O 3 roky bude mať Karol $5 + 3$ čiže 8, Peter $7 + 3$ čiže 10 a Božena $15 + 3$ čiže 18, takže Karol a Peter budú mať spolu toľko rokov ako Božena.

Karol má 5 rokov, Peter 7 a Božena 15.

---

2 Na obrázku je sivý štvorec so stranou dĺžky 10 cm. Štvorec dopĺňajú štyri rovnaké pravouhlé trojuholníky do tvaru hviezdy. Súčet obsahov týchto štyroch trojuholníkov je štvornásobkom obsahu štvorca.

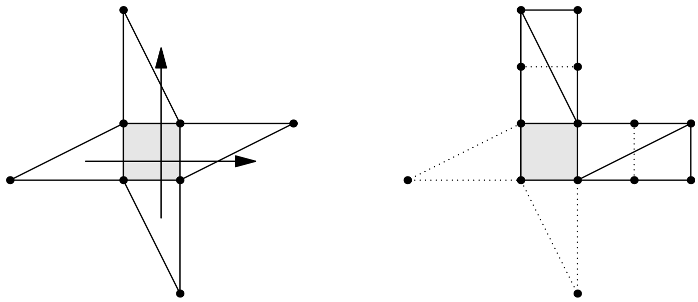


Určte dĺžku druhej najdlhšej strany každého z týchto štyroch trojuholníkov.

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Z každých dvoch bielych trojuholníkov je možné zložiť obdĺžnik, ktorého jedna strana sa zhoduje so stranou šedého štvorca. Zo štyroch trojuholníkov je možné zložiť dva obdĺžniky.



Súčet obsahov dvoch obdĺžnikov je 4-násobkom obsahu štvorca, práve keď druhá strana obdĺžnika je 2-násobkom strany štvorca. Teda druhá najdlhšia strana každého z týchto 4 trojuholníkov meria 20 cm.

---

3 V nasledujúcom výraze je päťkrát použité znamienko „+“ a jeho hodnota 39 je násobkom 3:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4.$$

Zmeňte dve zo znamienok „+“ na znamienka „−“ tak, aby hodnota nového výrazu bola opäť násobkom 3. Nájdite všetky možnosti.

(Eva Semerádová)

Riešenie 1:

Ako pôvodný, tak nový výsledok je násobkom 3. Ich rozdiel je dvojnásobok súčet odčítaných čísel, ten je teda tiež násobkom 3, takže aj tento súčet musí byť násobkom 3. Také súčty pre dvojice čísel od 4 do 8 sú práve tieto:

- $4 + 5$ čiže 9,
- $4 + 8$ čiže 12,
- $5 + 7$ čiže 12,
- $7 + 8$ čiže 15.

Všetky možné zámeny znamienok (a zodpovedajúce výsledky) sú teda:

- $9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4$ čiže 21,
- $9 - 8 + 7 + 6 + 5 - 4$ čiže 15,
- $9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4$ čiže 15,
- $9 - 8 - 7 + 6 + 5 + 4$ čiže 9.

Riešenie 2:

Počet možných zámien 2 znamienok z 5 je 10, a to tieto:

- $9 - 8 - 7 + 6 + 5 + 4 = 9$, čo vyhovuje,
- $9 - 8 + 7 - 6 + 5 + 4 = 11$, čo nevyhovuje,
- $9 - 8 + 7 + 6 - 5 + 4 = 13$, čo nevyhovuje,
- $9 - 8 + 7 + 6 + 5 - 4 = 15$, čo vyhovuje,
- $9 + 8 - 7 - 6 + 5 + 4 = 13$, čo nevyhovuje,
- $9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 = 15$, čo vyhovuje,

- $9 + 8 - 7 + 6 + 5 - 4 = 17$, čo nevyhovuje,
- $9 + 8 + 7 - 6 - 5 + 4 = 17$, čo nevyhovuje,
- $9 + 8 + 7 - 6 + 5 - 4 = 19$, čo nevyhovuje,
- $9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4 = 21$, čo vyhovuje.

Úloha má teda 4 riešenia, a to:

- $9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4$,
- $9 - 8 + 7 + 6 + 5 - 4$,
- $9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4$,
- $9 - 8 - 7 + 6 + 5 + 4$.

---

4 Pinocchio tvrdí, že číslo dňa v dátume jeho narodenia možno bezo zvyšku deliť 3, 4, 5 a 6. Tri z týchto štyroch informácií sú pravdivé, jedna je nepravdivá.

Koľký deň v mesiaci môže mať Pinocchio narodeniny? Nájdite všetky možnosti.

(Erika Novotná)

Riešenie 1:

Ak je deň by Pinocchiových narodenín deliteľný 6, je deliteľný aj 3, takže ak klame pri 3, klame aj pri 6.

Pri 3 teda neklame. Rozoberme prípady:

- Nech klame pri 4.

  Potom neklame pri 3, 5 a 6, takže deň narodenín je deliteľný ich najmenším spoločným násobkom 30. Je to teda 30.
- Nech klame pri 5.

  Potom neklame pri 3, 4 a 6, takže deň narodenín je deliteľný ich najmenším spoločným násobkom 12. Sú tú teda dni 12 a 24.
- Nech klame pri 6.

  Potom neklame pri 3, 4 a 5, takže deň narodenín je deliteľný ich najmenším spoločným násobkom 60. Taký deň však neexistuje.

Zhrnutím dostávame, že Pinocchio môže mať narodeniny v dňoch 12, 24, 30.

Riešenie 2:

Urobme prehľad deliteľnosti čísel neprevyšujúcich 31 deliteľných 3, 4, 5, 6 (• znamená kladnú odpoveď, prázdne miesto zápornú):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3			•			•			•			•			•
4				•				•				•			
5					•					•					•
6						•						•			

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
3			•			•			•			•			•	
4	•				•				•				•			
5					•					•					•	
3			•						•						•	

Stĺpce, kde sú prázdne 3 kladné odpovede, sú práve 12, 24, 30.

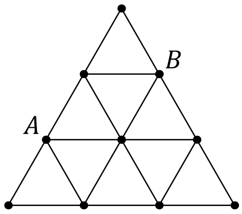
Pinocchio sa teda mohol narodiť 12., 24. alebo 30. deň v mesiaci.

Poznámka:

Ak sa Pinocchio narodil vo februári, možnosť 30. samozrejme odpadá.

---

5 V sieti chodníkov vyznačených na obrázku má každý chodník medzi susednými križovatkami dĺžku 1 km.



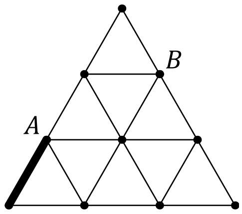
Koľko ciest dlhých nanajvýš 3 km vedie po chodníkoch z miesta A do miesta B?

(Eva Semerádová)

Riešenie:

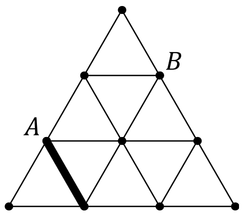
Rozoberme prípady:

- Nech je prvý kilometer takýto:

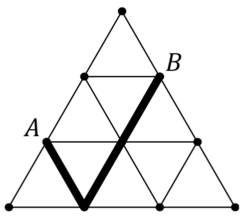


  Z tohto miesta je však do B viac než 2 km.
  Tento prípad teda nenastáva.

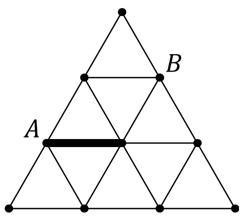
- Nech je prvý kilometer takýto:



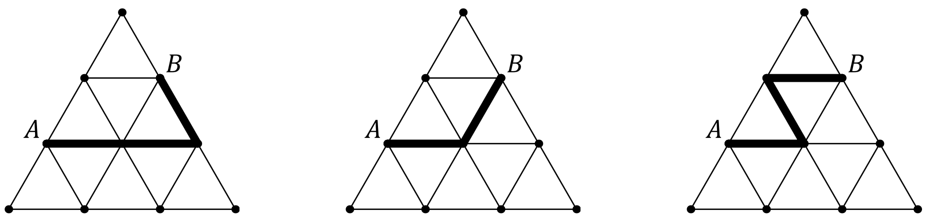
  Z tohto miesta je však do B len 1 cesta nie dlhšia než 2 km:



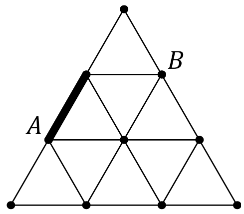
- Nech je prvý kilometer takýto:



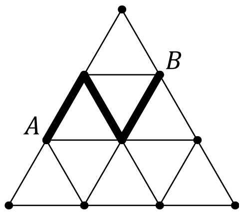
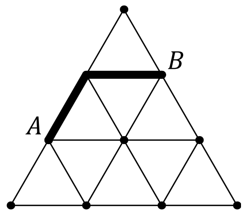
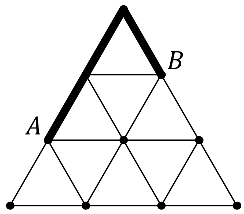
  Z tohto miesta sú do B 3 cesty nie dlhšie než 2 km:



- Nech je prvý kilometer takýto:



Z tohto miesta sú do B 3 cesty nie dlhšie než 2 km:

Zhrnutím teda dostávame, že úloha má $0 + 1 + 3 + 3$ čiže 7 riešení.

---

6 Anička navlieka na niť bezprostredne za seba koráliky troch rôznych tvarov A, B, C. Postupuje tak, že tvary strieda stále v rovnakom poradí a postupne zvyšuje počty tvarov v skupinách, a to takto:

ABCAABBCCAAABBBCCCAAAABBBBCCCC …

Korálik tvaru A zaberá 5 mm nite, korálik tvaru B 4 mm, korálik tvaru C 3 mm.

Koľko korálikov potrebuje Anička na výrobu náhrdelníka dlhého aspoň 50 cm?

(Lenka Dedková)

Riešenie 1:

Koráliky rozdelíme na skupiny takto:

ABC|AABBCC|AAABBBCCC|AAAABBBBCCCC| …

V každej skupine je potom rovnaký počet korálikov všetkých 3 typov a tento počet je zároveň poradové číslo skupiny. Trojica ABC (v ľubovoľnom poradí) pritom zaberá $5\,\text{mm} + 4\,\text{mm} + 3\,\text{mm}$ čiže 12 mm.

Vzhľadom na počet korálikov každého tvaru v skupine vyjadríme jej dĺžku, celkový počet korálikov a celkovú dĺžku doposiaľ zabranej nite:

počet trojíc korálikov jedného druhu v skupine	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet korálikov v skupine	3	6	9	12	15	18	21	24	27
dĺžka skupiny v mm	12	24	36	48	60	72	84	96	108
celkový počet korálikov doteraz	3	9	18	30	45	63	84	108	135
celková dĺžka v mm doteraz	12	36	72	120	180	252	336	432	540

Dĺžka 500 mm je teda dosiahnutá v rámci 9. skupiny. Posledná úplná skupina pozostáva z 8 korálikov každého tvaru. Na konci tejto skupiny je celkom zabraných 432 mm nite, zostáva teda 68 mm, doteraz použitých korálikov je 108.

9 korálikov tvaru A zaberá 45 mm. S týmito korálikmi je celkovo zabraných 477 mm nite, zostáva 23 mm, doteraz použitých korálikov je 117.

6 korálikov tvaru B zaberá 24 mm. S týmito korálikmi je celkovo zabraných 501 mm nite, doteraz použitých korálok je 123.

Anička teda potrebuje aspoň 123 korálikov.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024