MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9

1 Nájdite všetky dvojice celých čísel (x, y) také, že $x + y$ je prvočíslo a $3x + 5y = 16$.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Nech x a y sú vyhovujúce čísla, prvočíslo $x + y$ označme p. Z toho $y = p - x$, takže

$$3x + 5(p - x) = 16,$$

$$5p - 2x = 16,$$

$$5p = 2(8 + x).$$

Na pravej strane poslednej rovnice je párne číslo, teda p musí byť párne prvočíslo, t. j. $p = 2$. Odtiaľ

$$5 \cdot 2 = 2(8 + x),$$

$$5 = 8 + x,$$

$$-3 = x,$$

a teda

$$y = 2 - x = 2 - (-3) = 5.$$

Dvojica celých čísel $(-3, 5)$ naozaj vyhovuje, lebo $(-3) + 5 = 2$, čo je prvočíslo, a

$$3x + 5y = 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 = -9 + 25 = 16.$$

Riešenie 2:

Číslo $3x + 5y$ čiže 16 je párne, teda x a y musí mať rovnakú paritu. Preto súčet $x + y$ je párny, a keďže je to prvočíslo, platí $x + y = 2$.

Ďalej už pokračujeme rovnako ako v prvom riešení.

---

2 Pravidelný štvorboký hranol má objem $864\,\mathrm{cm}^3$ a obsah jeho plášťa je dvojnásobkom obsahu jeho podstavy. Určte dĺžku jeho telesovej uhlopriečky.

(Vladimír Dedek)

Riešenie:

Nech a je dĺžka strany podstavy hranola a v dĺžka jeho výšky. Podľa zadania potom

$$4 \cdot av = 2 \cdot a^2,$$

takže

$$2v = a,$$

a tiež

$$a^2 v = 864\,\mathrm{cm}^3,$$

takže

$$(2v)^2 v = 864\,\mathrm{cm}^3,$$

$$4v^2 v = 864\,\mathrm{cm}^3,$$

$$v^3 = 216\,\mathrm{cm}^3,$$

$$v = \sqrt[3]{216\,\mathrm{cm}^3},$$

$$v = 6\,\mathrm{cm}.$$

Označme s dĺžku jeho stenovej uhlopriečky a t dĺžku jeho telesovej uhlopriečky. Potom podľa Pytagorovej vety platí

$$s^2 = a^2 + v^2,$$

a keďže stenová uhlopriečke je kolmá na príslušnú stranu podstavy, lebo jej stena je na ňu kolmá, opäť podľa Pytagorovej vety

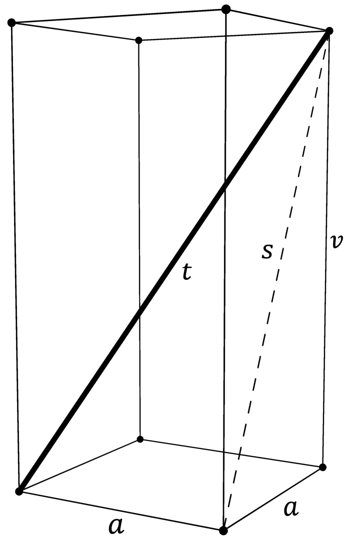
$$t^2 = a^2 + s^2.$$

Z toho

$$t^2 = a^2 + \left(a^2 + v^2\right) = 2a^2 + v^2 = 2(2v)^2 + v^2 = 2 \cdot 4v^2 + v^2 = 8v^2 + v^2 = 9v^2,$$

a teda

$$t = 3v = 3 \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}.$$



Telesová uhlopriečka hranola teda meria 18 cm.

---

3 Nájdite najväčšie možné n, pre ktoré je možné množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ rozdeliť do 5 neprázdnych podmnožín tak, aby čísla v každej podmnožine boli po dvoch nesúdeliteľné.

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

Keďže všetky párne čísla sú súdeliteľné, žiadne dve nemôžu byť spolu v jednej podmnožine. To teda znamená, že párnych čísel v množine $\{1, \dots, n\}$ je najviac 5, a preto $n < 12$.

Prípad $n = 11$ pritom vyhovuje, lebo stačí zobrať podmnožiny $\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $\{1, 4, 9\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\{10\}$.

Najväčšia možná hodnota n je teda 11.

---

4 Rozhodnite, či je možné k číslu s ciferným súčtom 2024 pripočítať jednociferné číslo tak, aby výsledné číslo malo ciferný súčet 74.

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

Po pripočítaní jednociferného čísla sa má ciferný súčet podstatne zmenšiť. To sa môže stať v čísle s veľa deviatkami za sebou, ktoré sa po pričítaní istého jednociferného čísla zmenia na nuly.

V našom prípade sa má ciferný súčet zmenšiť o $2024 - 74$ čiže o 1950. Pritom platí $1950 = 216 \cdot 9 + 6$, teda budeme potrebovať 216 takýchto deviatok.

Nech

$$n = \underbrace{9 \dots 9}_{7} 8 \underbrace{9 \dots 9}_{216} 9,$$

potom

$$n + 3 = \underbrace{9 \dots 9}_{7} 9 \underbrace{0 \dots 0}_{216} 2,$$

pričom 3 je jednociferné číslo, ciferný súčet n je $7 \cdot 9 + 8 + 216 \cdot 9 + 9$ čiže $63 + 8 + 1944 + 9$ čiže 2024 a ciferný súčet $n + 3$ je $7 \cdot 9 + 9 + 216 \cdot 0 + 2$ čiže $63 + 9 + 0 + 2$ čiže 74.

Odpoveď je teda kladná.

Poznámka:

Číslo má po delení 9 rovnaký zvyšok ako jeho ciferný súčet Keďže $2024 \bmod 9 = 8$ a $74 \bmod 9 = 2$, pôvodné číslo dáva po delení 9 zvyšok 8 a nové 2. Preto jednociferné číslo zo zadania, ktoré je ich rozdielom, je 3, a to v ľubovoľnom riešení.

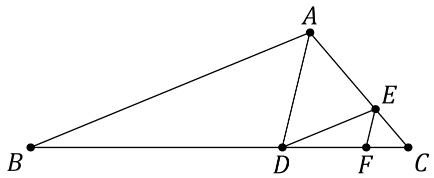
5 Nech ABC je trojuholník taký, že strana AB je dvakrát dlhšia ako strana AC a os uhla BAC pretína stranu BC v bode D. Nech rovnobežka so stranou AB prechádzajúca bodom D pretína stranu AC v bode E a rovnobežka s úsečkou AD prechádzajúca bodom E pretína stranu BC v bode F.

Určte pomer dĺžok úsečiek AD a EF.

(Mária Dományová)

Riešenie 1:

Vďaka rovnobežnosti AD a EF sú trojuholníky CAD a CEF podobné a vďaka rovnobežnosti AB a ED sú aj trojuholníky CAB a CED podobné. Koeficient podobnosti pre prvú aj pre druhú dvojicu trojuholníkov je rovnaký, pretože je určený tým istým bodom E na strane AC.



Priamka AD je osou uhla BAC, teda uhly EAD a BAD sú zhodné. Priamky AB a ED sú rovnobežné, takže uhly BAD a ADE sú striedavé, a teda zhodné. To teda znamená, že uhly EAD a ADE sú zhodné, a teda trojuholník ADE je rovnoramenný so zhodnými ramenami AE a ED.

Trojuholníky CAB a CED sú podobné, teda zodpovedajúce si pomery strán sú rovnaké. Platí teda

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|ED|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = 2,$$

takže

$$\frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|EC|} = 3.$$

Riešenie 2:

Vďaka rovnobežnosti AD a EF sú trojuholníky CAD a CEF podobné a vďaka rovnobežnosti AB a ED sú aj trojuholníky CAB a CED podobné. Koeficient podobnosti pre prvú aj pre druhú dvojicu trojuholníkov je rovnaký, pretože je určený tým istým bodom E na strane AC.

Podľa faktu, že os vnútorného uhla trojuholníka delí protiľahlú stranu v rovnakom pomere, v akom sú priľahlé strany, platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = 2,$$

takže

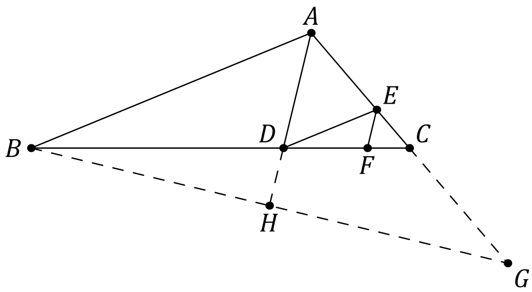
$$\frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|BD| + |DC|}{|DC|} = \frac{|BD|}{|DC|} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Riešenie 3:

Keďže priamky AB a ED sú rovnobežné, priamky AD a EF sú rovnobežné a priamky DB a FD sú totožné, a teda rovnobežné, trojuholníky ADB a EFD sú podobné.

Keďže úsečky AB a ED sú rovnobežné, trojuholníky CAB a CED sú rovnoľahlé so stredom rovonoľahlosti C.

Nech G je obraz bodu A v stredovej súmernosti podľa C a H je stred úsečky BG. Potom trojuholník BAG je rovnoramenný so základňou BG a AH je jeho ťažnica. Keďže aj BC je jeho ťažnica, ich priesečník D je jeho ťažisko.



Z toho dostávame

$$\frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|} = 3.$$

6 Plavci Pstruh a Kapor si chceli zmerať svoje sily. Z protiľahlých strán bazéna skočili súčasne do susedných dráh a plávali proti sebe, každý svojou konštantnou rýchlosťou. Prvýkrát sa plavci minuli vo vzdialenosti 8 metrov od Pstruhovej štartovacej strany, na konci dráhy sa rýchlo otočili a plávali naspäť. Druhýkrát sa plavci minuli vo vzdialenosti 5 metrov od Kaprovej štartovacej strany, doplávali na koniec dráhy, a tým sa preteky skončili.

Určte, kto vyhral a aká bola dĺžka bazéna.

(Libuše Hozová)

Riešenie 1:

Druhé míňanie prebehlo bližšie ku Kaprovmu brehu ako prvé míňanie k Pstruhovmu brehu. Teda Kapor plával rýchlejšie ako Pstruh, a preto vyhral.

Pri prvom míňaní mali Pstruh a Kapor v súčte zaplávanú 1 dĺžku bazéna, pri druhom míňaní mali v súčte 3 dĺžky bazéna. Ak teda označíme t čas prvého míňania, tak druhýkrát sa míňali v čase $3t$.

Pstruh za čas t zaplával 8 metrov, teda za čas $3t$ zaplával 24 metrov. Súčasne v čase $3t$ preplával celý bazén a ďalších 5 metrov po otočku. Dĺžka bazéna teda bola $24 - 5$ čiže 19 metrov.

Overíme, že situácia zo zadania mohla nastať: Pri prvom stretnutí plavcov Pstruh preplával 8 m a Kapor $19\,\mathrm{m} - 8\,\mathrm{m}$ čiže 11 m. Pri druhom stretnutí Pstruh preplával $19\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m}$ čiže 24 m a Kapor $2 \cdot 19\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}$ čiže 33 m. Obaja teda preplávali rovnako 3-krát viac než pri prvom stretnutí, takže pomer ich rýchlosti sa naozaj nezmenil.

Riešenie 2:

Dĺžku bazéna označme d.

Pri prvom stretnutí plavcov Pstruh preplával 8 m a Kapor $d - 8\,\mathrm{m}$.

Pri ich druhom stretnutí (teda nie dobehnutí) Pstruh preplával celý bazén a navyše 5 m, t. j. $d + 5\,\mathrm{m}$, a Kapor celý bazén a navyše $d - 5\,\mathrm{m}$, t. j. $d + (d - 5\,\mathrm{m})$ čiže $2d - 5\,\mathrm{m}$. Keďže ich rýchlosti sú konštantné, aj pomery ich dráh v týchto dvoch časoch sú rovnaké. Platí teda

$$\frac{8\,\mathrm{m}}{d - 8\,\mathrm{m}} = \frac{d + 5\,\mathrm{m}}{2d - 5\,\mathrm{m}},$$

takže

$$\begin{aligned} 8\,\mathrm{m} \cdot (2d - 5\,\mathrm{m}) &= (d + 5\,\mathrm{m}) \cdot (d - 8\,\mathrm{m}), \\ d \cdot 16\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}^2 &= d \cdot d - d \cdot 8\,\mathrm{m} + d \cdot 5\,m - 40\,\mathrm{m}^2, \\ d \cdot 19\,\mathrm{m} &= d \cdot d, \\ 19\,\mathrm{m} &= d. \end{aligned}$$

Dĺžka bazéna teda bola 19 m. Pri prvom stretnutí plavcov Pstruh preplával 8 m a Kapor $19\,\mathrm{m} - 8\,\mathrm{m}$ čiže 11 m, takže Kapor bol rýchlejší, a teda vyhral. Pri druhom stretnutí potom Pstruh preplával $19\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m}$ čiže 24 m a Kapor $2 \cdot 19\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}$ čiže 33 m. Obaja teda preplávali rovnako 3-krát viac než pri prvom stretnutí, takže pomer ich rýchlosti sa naozaj nezmenil.

Poznámka:

Ak by sme za druhé stretnutie predsa len považovali dobehnutie, máme dva prípady:

- Nech je rýchlejší Kapor.

  Potom pri jeho dobehnutí Pstruha ten preplával $d - 5\,\mathrm{m}$ a on celý bazén a navyše $d - 5\,\mathrm{m}$. t. j. $d + (d - 5\,\mathrm{m})$ čiže $2d - 5\,\mathrm{m}$. Keďže ich rýchlosti sú konštantné, aj pomery ich dráh v týchto dvoch časoch sú rovnaké. Platí teda

  $$\frac{8\,\mathrm{m}}{d - 8\,\mathrm{m}} = \frac{d - 5\,\mathrm{m}}{2d - 5\,\mathrm{m}},$$

  ekvivalentne

  $$\begin{aligned} 8\,\mathrm{m} \cdot (2d - 5\,\mathrm{m}) &= (d - 5\,\mathrm{m}) \cdot (d - 8\,\mathrm{m}), \\ d \cdot 16\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}^2 &= d \cdot d - d \cdot 8\,\mathrm{m} - d \cdot 5\,m + 40\,\mathrm{m}^2, \\ 0 &= d^2 - 29\,\mathrm{m} \cdot d + 80\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

  Riešením tejto kvadratickej rovnice dostávame

  $$d \in \left\{ \frac{29 - \sqrt{521}}{2}\,\mathrm{m}, \frac{29 + \sqrt{521}}{2}\,\mathrm{m} \right\}.$$

  Menšia z hodnôt je však menšia než 8 m, čo vzhľadom na zadanie nie je možné, takže

  $$d = \frac{29 + \sqrt{521}}{2}\,\mathrm{m},$$

čo je približne 25,9 m.

- Nech je rýchlejší Pstruh.

  Potom pri jeho dobehnutí Kapra preplával celý bazén a navyše 5 m, t. j. $d + 5\,\mathrm{m}$, a Kapor 5 m. Keďže ich rýchlosti sú konštantné, aj pomery ich dráh v týchto dvoch časoch sú rovnaké.

  Platí teda

$$\frac{8\,\mathrm{m}}{d - 8\,\mathrm{m}} = \frac{d - 5\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}},$$

  ekvivalentne

$$40\,\mathrm{m}^2 = (d - 5\,\mathrm{m}) \cdot (d - 8\,\mathrm{m}),$$

$$40\,\mathrm{m}^2 = d \cdot d - d \cdot 8\,\mathrm{m} - d \cdot 5\,m + 40\,\mathrm{m}^2,$$

$$d \cdot 13\,\mathrm{m} = d^2 - 13\,\mathrm{m} \cdot d,$$

$$13\,\mathrm{m} = d.$$

  V takomto prípade však oba časové okamihy splývajú, čo je spor s tým, že ide o druhé stretnutie.

  Tento prípad teda nenestáva.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024