MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

1 Z cifier 1 až 9 vytvoríme 9-ciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom každú jeho dvojicu po sebe idúcich cifier interpretujeme ako dvojciferné číslo a vezmeme jeho najmenší prvočíselný deliteľ. Môžeme tak získať práve dve rôzne prvočísla? Ak áno, určte všetky také dvojice prvočísel.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Z cifier 1 až 9 sú 4 párne (2, 4, 6, 8), takže aspoň 3 a najviac 4 uvažované dvojčíslia sú párne. Jedno zo získaných prvočísel je teda 2. Keďže sme získali 8 čísel a číslo 2 je tam najviac 4-krát, to druhé prvočíslo tam musí byť aspoň 4-krát. Ukážeme, že toto druhé prvočíslo môže byť iba 3.

Prvočíslo 5 tam môže byť najviac raz, a to v tom dvojmiestnom čísle, ktoré má na mieste jednotiek číslicu 5.

Prvočíslo 7 dostaneme len z dvojčíslí $7 \cdot 7$ čiže 49, $7 \cdot 11$ čiže 77, $7 \cdot 13$ čiže 91, takže číslo 7 ziskame najviac 3-krát.

Pre prvočíslo p väčšie ako 7, t. j. aspoň 11, môže existovať najviac jedno vyhovujúce dvojciferné číslo, a to p, lebo $p \cdot p$ je aspoň trojciferné, a teda každé iné dvojciferné číslo deliteľné p má jednociferného prvočíselného deliteľa, ktorý je teda menší než p.

Príkladom čísla, ktoré vyhovuje, je 124563987 (dokonca je to najmenšie z nich). Pre toto číslo získavame prvočísla 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3.

Poznámka:

Možných vyhovujúcich čísel je 3072.

Hoci to kvôli úplnosti riešenia nie je potrebné, ukážeme, ako sme k nejakému vyhovujúcemu číslu mohli prísť. Prirodzený spôsob je striedať nepárne a párne čísla tak, aby dvojciferné čísla končiace nepárnym číslom boli deliteľné 3. Pre každú párnu cifru nájdeme vhodný násobok 3, napr. 21, 45, 63, 87, z čoho dostaneme číslo 921456387.

Ukážeme ešte systematický postup, ako prísť k najmenšiemu vyhovujúcemu číslu. Začneme zľava a budeme postupne skúšať pripisovať čo najmenšie číslice. Vždy, keď by sme mali získať prvočíslo iné ako 2 či 3, vrátime sa o krok späť. Tento proces vylučovania nevhodných čísel vyzerá takto:

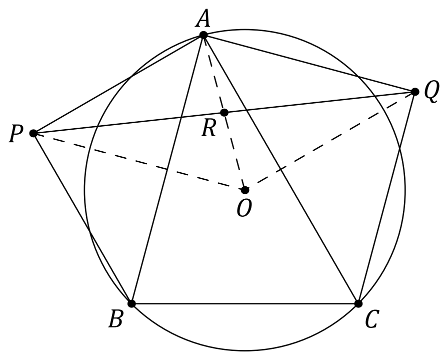
- 123______ nefunguje, 23 je veľké prvočíslo.
- 1243_____ nefunguje, 43 je veľké prvočíslo.
- 12453____ nefunguje, 53 je veľké prvočíslo.
- 1245637__ nefunguje, 37 je veľké prvočíslo.
- 124563879 nefunguje, 79 je veľké prvočíslo.
- 124563897 nefunguje, 97 je veľké prvočíslo.
- 12456397_ nefunguje, 97 je veľké prvočíslo.
- 124563987 funguje.

2 Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle BAC| = 45°$. K stranám AB a AC sú zvonku pripísané pravouhlé rovnoramenné trojuholníky ABP a ACQ s preponami AB, resp. AC. Označme R stred úsečky PQ. Dokážte, že dĺžka úsečky AR je polovica polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC.

(Patrik Bak, Anastasia Bredichina)

Riešenie 1:

Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Vieme, že bod O leží na osi úsečky AB. Keďže je trojuholník ABP rovnoramenný, tak na osi úsečky AB leží aj bod P. Priamka PO je preto kolmá na úsečku AB. Z rovnoramennosti a pravouhlosti trojuholníka ABP tiež máme $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PBA| = 45°$. Preto platí $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAQ| = 45° + 45° = 90°$. Tým pádom Obe úsečky PO a AQ sú teda kolmé na AB, sú teda rovnobežné. Analogicky sú rovnobežné aj úsečky AP a OQ. Štvoruholník $APOQ$ je teda rovnobežník, a jeho uhlopriečky sa preto rozpoľujú. Bod R, ktorý je stredom uhlopriečky PQ, je teda aj stredom uhlopriečky AO. Preto $|AR| = |AO|/2$.



Riešenie 2:

Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Keďže $|PA| = |PB|$ a $|OA| = |OB|$, sú trojuholníky PAO a PBO zhodné podľa vety *sss*. Analogicky sú zhodné aj trojuholníky QAO a QCO.

Keďže BAC je obvodový uhol kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý prislúcha jej stredovému uhlu BOC, tak platí podľa vety o obvodovom a stredovom uhle

$$|\sphericalangle BOC| = 2\,|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot 45° = 90°.$$

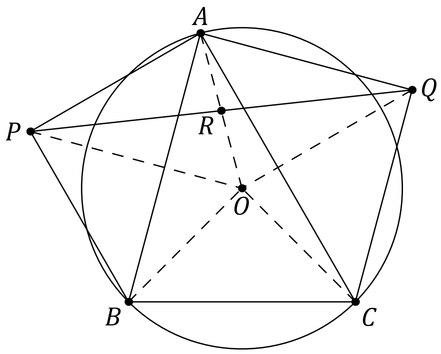
Keďže OB a OC sú polomery kružnice k, trojuholník BOC je rovnoramenný pravouhlý s preponou BC. Potom platí

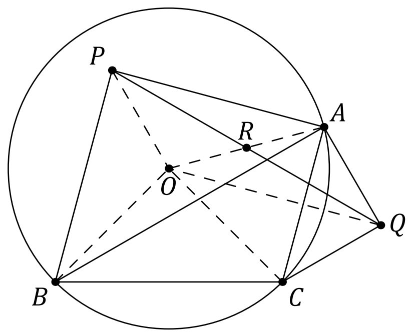
$$\frac{|BP|}{|BA|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|BO|}{|BC|}.$$

Taktiež platí aj

$$|\sphericalangle PBO| = |\sphericalangle PBA| \pm |\sphericalangle ABO| = |\sphericalangle OBC| \pm |\sphericalangle ABO| = |\sphericalangle ABC|,$$

kde uhly sčítavame, ak bod O leží v polrovine BAC, a inak odčítavame. Preto sú trojuholníky PBO a ABC pri tomto poradí vrcholov podľa vety *sus* podobné. Analogicky sú podobné aj trojuholníky QCO a ACB.





Zhrnutím dostávame, že platia nasledovné podobnosti, resp. zhodnosti:

$$\triangle PAO \cong \triangle PBO \sim \triangle ABC \sim \triangle QOC \cong \triangle QOA.$$

Tak dostávame, že trojuholníky PAO a QOA sú podobné a v tejto podobnosti strana AO zodpovedá sama sebe. Preto je štvoruholník $APOQ$ rovnobežník, takže stred R jeho uhlopriečky PQ je zároveň stredom uhlopriečky AO, a teda $|AR| = |AO|/2$.

Riešenie 3:

Nech r je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, potom

$$r = \frac{|BC|}{2\sin 45°} = \frac{|BC|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|BC|.$$

Z rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov ACQ a ABP určíme $|AQ| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|AC|$ a $|AP| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|AB|$.

Podľa kosínusovej vety v trojuholníky ABC a APQ platí

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos|\sphericalangle BAC|$$

$$= |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos 45° = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= |AC|^2 + |AB|^2 - |AC| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2}$$

a

$$|PQ|^2 = |AQ|^2 + |AP|^2 - 2 \cdot |AQ| \cdot |AP| \cdot \cos |\sphericalangle PAQ|$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,|AC|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,|AB|\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,|AC| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\,|AB| \cdot \cos(|\sphericalangle PAQ| + |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAQ|)$$

$$= \frac{1}{2}\,|AC|^2 + \frac{1}{2}\,|AB|^2 - |AC| \cdot |AB| \cdot \cos(45^\circ + 45^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2}\,|AC|^2 + \frac{1}{2}\,|AB|^2 - |AC| \cdot |AB| \cdot \cos 135^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\,|AC|^2 + \frac{1}{2}\,|AB|^2 - |AC| \cdot |AB| \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\,|AC|^2 + \frac{1}{2}\,|AB|^2 + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2}.$$

Keďže AR je ťažnica v trojuholníku APQ, platí

$$|AR|^2 = \frac{|AQ|^2 + |AP|^2}{2} - \frac{|PQ|^2}{4}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,|AC|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,|AC|\right)^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}\,|AC|^2 + \frac{1}{2}\,|AB|^2 + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\left(2\,|AC|^2 + 2\,|AC|\right) - \left(|AC|^2 + |AB|^2 + |AC| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2}\right)}{8}$$

$$= \frac{|AC|^2 + |AB|^2 - |AC| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2}}{8} = \frac{|BC|^2}{8},$$

teda

$$|AR| = 2\sqrt{2}\,|BC| = 2r.$$

---

3 Pre ktoré kladné prirodzené čísla n sa dá rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n rozrezať na zhodné konvexné dieliky tvorené z

a) 2,

b) 3

rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1?

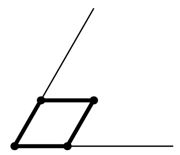
(Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

Poznámka:

Vo všetkých riešeniach uvažujeme len rovnostranné trojuholníky, aj ak rovnostrannosť explicitne nespomenieme. Kvôli jednoduchosti vyjadrovania umiestnime delený trojuholník tak, aby mal jednu stranu vodorovne a protiľahlý vrchol nad ňou.

Riešenie a) 1:

Pozrime sa na ľavý roh na vodorovnej (spodnej) strane trojuholníka. Keďže v ľavom vrchole na vodorovnej strane je uhol veľkosti 60°, existuje jediný spôsob, ako možno odrezať dielik, ktorý bude obsahovať tento vrchol. Po odrezaní opäť vznikne vľavo na vodorovnej skrátenej strane nový vrchol s uhlom 60°.

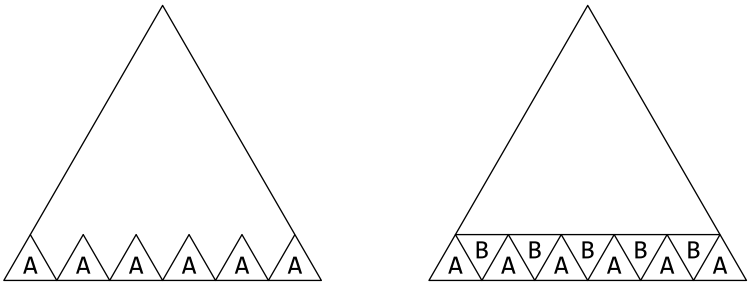


Ak túto úvahu zopakujeme $(n-1)$-krát, tak ostane trojuholník so stranou dĺžky 1, ktorý nie je zhodný s uvažovaným dielikom.

Žiadne kladné prirodzené číslo n teda nevyhovuje.

Riešenie a) 2:

Predpokladajme, že máme trojuholník rozrezaný na dieliky. Každý dielik ešte rozrežeme na dva jednotkové rovnostranné trojuholníky a budeme skúmať, ako takéto rozrezanie veľkého trojuholníka na jednotkové môže vyzerať. Vodorovná strana trojuholníka s dĺžkou n je pokrytá n jednotkovými trojuholníkmi ktoré sú orientované vrcholom nahor. Označme ich A. Po ich odstránení na spodnej strane ostane len $n-1$ bodov, ktoré musia byť pokryté len $n-1$ jednotkovými trojuholníkmi, ktoré sú orientované *vrcholom nadol*. Označme ich B. Každý trojuholník typu A bol súčasťou dielika, ktorého druhý trojuholník typu B. Lenže prvých je n a druhých len $n-1$, čo je spor. Nevyhovuje teda žiadne n.

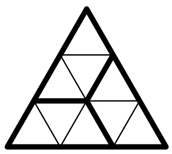


Riešenie b):

Obsah rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 1 označme S. Potom jeden dielik má obsah $3S$. Trojuholník so stranou dĺžky n je podobný s jednotkovým trojuholníkom s koeficientom podobnosti n, má teda obsah n^2S.

Nech k je (zrejme kladný) počet dielikov, potom platí $n^2S = k \cdot 3S$, takže $n^2 = 3k$, a teda n je deliteľné 3.

Táto podmienka je aj postačujúca: Veľký trojuholník rozdelíme na trojuholníky so stranou dĺžky 3 a každý z nich rozrežeme na tri dieliky ako na obrázku:



Vyhovujú teda všetky kladné prirodzené hodnoty n deliteľné 3.

Poznámka:

V žiadnom z týchto riešení sme nepoužili intuitívne zrejmé tvrdenie, že pri rozrezaní trojuholníka so stranou dĺžky n trojuholníkmi so stranou 1 musia byť rezy rovnobežné s jeho stranami. V opačnom prípade by sme museli toto tvrdenie dokázať.

---

4 a) Nájdite príklad dvojciferného prirodzeného čísla n takého, že číslo $1/n$ má vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve dve cifry.

b) Dokážte, že pre každé dve kladné prirodzené čísla k a l existujú práve dve kladné racionálne čísla, ktoré majú vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve k cifier a ich prevrátené hodnoty práve l cifier.

(Josef Tkadlec)

Riešenie a):

Vyhovuje napríklad číslo 25, lebo $1/25 = 0{,}04$.

Riešenie b) 1:

Budeme pre stručnosť hovoriť, že kladné racionálne číslo má *dĺžku zápisu* d, ak jeho najkratší možný desatinný zápis má práve d číslic za desatinnou čiarkou.

Kladné racionálne číslo x s dĺžkou zápisu d môžeme zapísať ako $c/10^d$, kde c je kladné celé číslo nedeliteľné 10. Avšak číslo c môže byť deliteľné nejakou mocninou 2 alebo nejakou mocninou 5, ktorou môžeme zlomok krátiť. Po prevode do základného tvaru tak v menovateli dostaneme číslo tvaru $2^{d-z}5^d$ alebo 2^d5^{d-z}, kde z je nejaké kladné prirodzené číslo. Kladné racionálne číslo x má teda dĺžku zápisu d práve vtedy, keď v základnom tvare má menovateľ rovný 2^a5^b pre nejaké kladné celé čísla a a b, z ktorých jedno je d a druhé nanajvýš d.

Uvažujme kladné racionálne číslo x so základným tvarom p/q, ktoré má dĺžku zápisu k a jeho prevrátená hodnota $1/x$ čiže q/p má dĺžku zápisu l. Podľa prechádzajúceho odseku sú p aj q tvaru 2^a5^b. Keďže zlomok p/q je v základnom tvare, najviac jedno z čísel p a q je párne a najviac jedno je deliteľné 5. Obe čísla p a q sú pritom rôzne od 1, keďže čísla k a l sú kladné. Preto jedno z čísel p a q musí obsahovať v prvočíselnom rozklade len 2 a druhé len 5.

Rozoberme prípady:

- Nech q obsahuje v prvočíselnom rozklade len 2.

  Keďže q neobsahuje v prvočíselnom rozklade 5 a zápis p/q má dĺžku k, musí podľa vyššie uvedeného pozorovania platiť $q = 2^k$. Keďže p neobsahuje v prvočíselnom rozklade 2 a zápis q/p má dĺžku l, musí platiť $p = 5^l$. Číslo $5^l/2^k$ teda spĺňa všetky požadované podmienky a je jedným z čísel, ktorých existenciu sme mali podľa zadania dokázať.

- Nech q obsahuje v prvočíselnom rozklade len 5.
  Analogickým postupom zistíme, že jediným vyhovujúcim číslom je $2^l/5^k$.

Riešenie b) 2:

Nech x a y sú kladné prirodzené čísla také, že existuje prirodzené číslo a a cifry $b_1, \ldots, b_k$, pričom $b_k \neq 0$, že

$$\frac{x}{y} = \overline{a{,}b_1 \ldots b_k},$$

a existuje prirodzené číslo c a cifry $d_1, \ldots, d_l$, pričom $d_l \neq 0$,

$$\frac{y}{x} = \overline{c{,}d_1 \ldots d_l}.$$

Platí teda

$$\frac{x}{y} = \frac{\overline{ab_1 \ldots b_k}}{10^k},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{cd_1 \ldots d_l}}{10^l},$$

t. j.

$$10^k x = \overline{ab_1 \ldots b_k} \cdot y,$$

$$10^l y = \overline{cd_1 \ldots d_l} \cdot x,$$

z čoho

$$10^k x \cdot 10^l y = \overline{ab_1 \ldots b_k} \cdot y \cdot \overline{cd_1 \ldots d_l} \cdot x,$$

$$10^{k+l} = \overline{ab_1 \ldots b_k} \cdot \overline{cd_1 \ldots d_l},$$

$$2^{k+l} \cdot 5^{k+l} = \overline{ab_1 \ldots b_k} \cdot \overline{cd_1 \ldots d_l}.$$

Keďže $b_k \neq 0$ a $d_l \neq 0$, čísla $\overline{ab_1 \ldots b_k}$ a $\overline{cd_1 \ldots d_l}$ nie sú deliteľné 10, platí teda

$$\left(\overline{ab_1 \ldots b_k}, \overline{cd_1 \ldots d_k}\right) \in \left\{\left(2^{k+l}, 5^{k+l}\right), \left(5^{k+l}, 2^{k+l}\right)\right\}.$$

Rozoberme prípady:

- Nech $\left(\overline{ab_1 \ldots b_k}, \overline{cd_1 \ldots d_l}\right) = \left(2^{k+l}, 5^{k+l}\right)$.
  Z toho
  $$\frac{x}{y} = \frac{\overline{ab_1 \ldots b_k}}{10^k} = \frac{2^{k+l}}{10^k} = \frac{2^l}{5^k},$$
  takže $\frac{x}{y}$ má vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve k cifier. Potom
  $$\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{5^k}{2^l} = \frac{5^{k+l}}{10^l},$$
  takže $\frac{y}{x}$ má vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve l cifier.
- Nech $\left(\overline{ab_1 \ldots b_k}, \overline{cd_1 \ldots d_l}\right) = \left(5^{k+l}, 2^{k+l}\right)$.
  Z toho
  $$\frac{x}{y} = \frac{\overline{ab_1 \ldots b_k}}{10^k} = \frac{5^{k+l}}{10^k} = \frac{5^l}{2^k},$$
  takže $\frac{x}{y}$ má vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve k cifier. Potom
  $$\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{2^k}{5^l} = \frac{2^{k+l}}{10^l},$$
  takže $\frac{y}{x}$ má vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve l cifier.

Hľadané racionálne čísla sú teda $\frac{2^l}{5^k}$ a $\frac{5^l}{2^k}$.

Poznámka:

Hoci to zadanie nevyžaduje, ukážeme spôsob, ako nájsť všetky čísla n vyhovujúce časti a). Na základe úvodného pozorovania číslo n musí byť tvaru $2^a 5^b$, kde jedno z a a b je 2 a druhé je nanajvýš 2. Do úvahy teda prichádzajú tieto čísla:

- 2^2 čiže 4, čo nie je dvojciferné.
- $2^2 \cdot 5$ čiže 20, pričom $1/20 = 0{,}05$.
- $2^2 \cdot 5^2$ čiže 100, čo nie je dvojciferné.
- 5^2 čiže 25, pričom $1/25 = 0{,}04$.
- $2 \cdot 5^2$ čiže 50, pričom $1/50 = 0{,}02$.

Vyhovujú teda práve čísla z množiny $\{20, 25, 50\}$.

---

5 Označme k kružnicu opísanú ostrouhlému trojuholníku ABC. Nech jej obraz v súmernosti podľa priamky BC pretína polpriamky opačné k polpriamkam BA a CA v bodoch D, resp. E rôznych od B, resp. C. Nech sa úsečky CD a BE sa pretínajú na kružnici k. Určte všetky možné veľkosti uhla BAC.

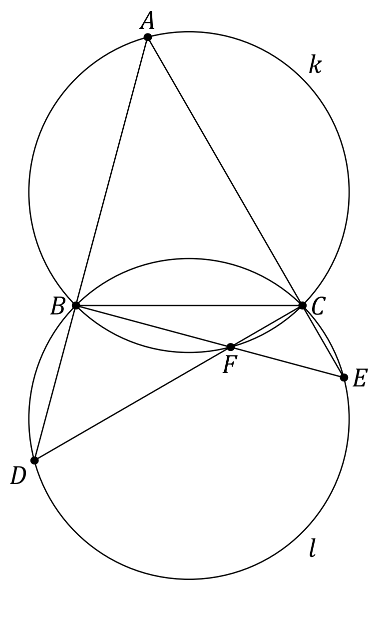
(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Obraz kružnice k v osovej súmernosti podľa priamky BC označíme l. Oblúk kružnice k s krajnými bodmi B a C obsahujúci bod A sa v tejto osovej súmernosti zobrazí na oblúk kružnice l s krajnými bodmi B a C obsahujúci body D a E, pretože body D a E podľa zadania ležia v polrovine opačnej k BCA. Keďže ide o zhodné oblúky, im prislúchajú zhodné obvodové uhly BAC, CDB, CEB. Trojuholníky CAD a BAE teda majú dve dvojice zhodných uhlov, preto aj uhly ACD a EBA sú zhodné.

Ak predpokladáme, že sa úsečky CD a BE pretínajú na kružnici k, tak súčet veľkostí zhodných uhlov ACD a EBA je 180°, teda $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle EBA| = 90°$. Z rovnoramenného pravouhlého trojuholníka CAD (resp. BAE) tak dostávame, že $|\sphericalangle BAC| = 45°$, čo je jediná možná veľkosť uhla BAC.

Naopak, ak $|\sphericalangle BAC| = 45°$, tak rovnoramenné trojuholníky CAD a BAE sú pravouhlé s pravými uhlami ACD a ABE. Preto priesečník F priamok CD a BE vytvorí spolu s bodmi B, A, C tetivový štvoruholník, čiže F leží na kružnici k.



Riešenie 2:

Označme F priesečník úsečiek CD a BE a α hľadanú veľkosť uhla BAC. Rovnakým argumentom (o obvodových uhloch) ako v predošlom riešení dostaneme, že $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CEB| = \alpha$. Trojuholníky CAD a BEA sú preto rovnoramenné a $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABE| = 180° - 2\alpha$. Uhol DBF je susedný k uhlu EBA, a preto má veľkosť $180° - (180° - 2\alpha)$ čiže 2α. Uhol CFB je vonkajším uhlom k uhlu pri vrchole F v trojuholníku BFD, preto $|\sphericalangle CFB| = |\sphericalangle BDF| + |\sphericalangle DBF| = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

Bod F leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC práve vtedy, keď $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CFB| = \alpha + 3\alpha = 180°$, čiže práve vtedy, keď $\alpha = 45°$. Tým sme určili jedinú možnú veľkosť uhla BAC.

Riešenie 3:

Zadanie si môžeme preformulovať aj takto: V trojuholníku ABC najprv zvolíme bod X z kratšieho oblúka kružnice k s krajnými bodmi B a C (ktorý neobsahuje bod A). Potom označíme D' priesečník priamok CX a AB a E' priesečník priamok BX a AC. Úsečky CD a BE sa pretnú na kružnici k (v bode X) práve vtedy, keď sú totožné body D' a D a zároveň body E' a E. Platí

$$|\sphericalangle AD'C| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle BCX|$$

a

$$|\sphericalangle AE'B| = |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle CBX|.$$

Preto

$$\begin{aligned}|\sphericalangle AD'C| + |\sphericalangle AE'B| &= |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| - (|\sphericalangle BCX| + |\sphericalangle CBX|)\\ &= 180^\circ - |\sphericalangle BAC| - (180^\circ - |\sphericalangle BXC|) = 180^\circ - 2\,|\sphericalangle BAC|.\end{aligned}$$

V zadanej situácii však platí $D' = D$ a $E' = E$ a zároveň uhly ADC, AEB, BAC majú rovnakú veľkosť, pretože prislúchajú rovnako dlhej tetive v zhodných kružniciach. Z toho dostávame, že $2\,|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - 2\,|\sphericalangle BAC|$, z čoho máme $|\sphericalangle BAC| = 45^\circ$. Kvôli úplnosti ešte dodáme, že úsečky CD a BE ležia podľa zadania v polrovine opačnej k BCA, preto aj ich priesečník sa bude nachádzať na oblúku kružnice k s krajnými bodmi B a C neobsahujúcom bod A.

Naopak, ak $|\sphericalangle BAC| = 45^\circ$, tak za bod X zvolíme priesečník úsečky CD s kružnicou. Vtedy $D' = D$, $|\sphericalangle AD'C| = |\sphericalangle ADC| = 45^\circ$ a $|\sphericalangle AE'B| = 180^\circ - 2\,|\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle AD'C| = 45^\circ$. Preto bod E' leží s bodmi B, C, D na kružnici, čo znamená, že $E' = E$. Úsečky CD a BE sa tak pretínajú na kružnici k.

---

6 Nech x, y, z sú kladné reálne čísla také, že $xy \geq 2$, $zx \geq 3$, $yz \geq 6$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Platí

$$\begin{aligned}13x^2 + 10y^2 + 5z^2 &= \left(4x^2 + y^2\right) + \left(z^2 + 9x^2\right) + \left(9y^2 + 4z^2\right)\\ &= \left(4x^2 - 4xy + y^2\right) + \left(z^2 - 6zx + 9x^2\right) + \left(9y^2 - 12yz + 4z^2\right) + 4xy + 6zy + 12yz\\ &= (2x - y)^2 + (3x - z)^2 + (3y - 2z)^2 + 4xy + 6xz + 12yz\\ &\geq 4xy + 6xz + 12yz \geq 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 6 = 8 + 18 + 72 = 98,\end{aligned}$$

pričom rovnosť nastáva v prípade $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Najmenšia hodnota skúmaného výrazu je teda 98.

Poznámka:

Hoci uvedené riešenie je stručné, nie je priamočiare naň prísť. Preto ilustrujeme myšlienky, ktoré k nemu môžu viesť.

Prvou ideou je získať dolný odhad vhodným doplnením na tri štvorce dvojčlenov. Z každého štvorca dostaneme dva z násobkov členov x^2, y^2, z^2 a jeden z násobkov členov xy, xz, yz. Príslušné násobky členov xy, xz, yz potom ostanú mimo štvorcov a tie odhadneme podľa zadania. Kľúčovým krokom je správne naložiť s konštantami, ktoré sú pri x^2, y^2, z^2. Tu pomôže pozorovanie, že všetky tieto tri konštanty vieme vyjadriť ako súčet štvorcov: $13 = 2^2 + 3^2$, $10 = 1^2 + 3^2$ a $5 = 1^2 + 2^2$. To nám napovedá, že vhodný rozklad na tri štvorce by sme mohli získať vytvorením vhodných dvojíc z týchto šiestich členov. Môžeme vyskúšaním niektorých z nich, napr. z rozkladu $13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = (2x - 3y)^2 + (3x - z)^2 + (y - 2z)^2 + 12xy + 6xz + 4yz \geq 66$ získame slabý odhad, ktorý nemožno dosiahnuť. Skúšanie si vieme uľahčiť uhádnutím (napr. na základe vyskúšania niekoľkých trojíc), že najmenšia hodnota výrazu sa nadobudne v prípade $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Štvorce potom zvolíme tak, aby pre túto trojicu nadobúdali 0.

Riešenie 2:

Riešenie založíme na intuitívnom pozorovaní, že najmenšiu hodnotu má zadaný výraz vtedy, keď sú hodnoty x, y, z čo najmenšie, pričom ich zmenšovanie je limitované istými nerovnosťami.

Pri riešení použijeme niekoľkokrát toto tvrdenie: Nech k a m sú kladné reálne čísla a f je funkcia taká, že $f(x) = kx^2 + m/x^2$ pre každé kladné reálne číslo x. Nech $M = \sqrt[4]{m/k}$. Potom funkcia f nadobúda v M minimum, na intervale $(0, M]$ je klesajúca a na intervale $[M, \infty)$ je rastúca.

Jeho dôkaz vyplýva z úpravy $f(x) = \left(\sqrt{k} \cdot x - \sqrt{m}/x\right)^2 + 2\sqrt{km}$. Výraz v zátvorke je rastúci a nadobúda hodnotu 0 práve v M. Preto je výraz v zátvorke pre x z $(0, M]$ záporný, takže jeho absolútna hodnota, a teda aj druhá mocnina, klesá. Pre x z $[M, \infty)$ je zas kladný. Preto f na intervale $(0, M]$ klesá a na intervale $[M, \infty)$ rastie.

Uvažujme ľubovoľnú trojicu (x, y, z) spĺňajúcu nerovnosti zo zadania. Ak v najviac jednej nerovnosti nastáva rovnosť, tak existuje premenná, ktorá sa nachádza v dvoch ostrých nerovnostiach.

Nech je to premenná x. Platí teda $xy > 2$ a $xz > 3$. Obe z hodnôt $2/y$ a $3/z$ sú menšie ako x. Zmenšíme teda číslo x na číslo x' rovné maximu týchto dvoch hodnôt. Potom platí $x'y \geq 2$ a $x'z \geq 3$, pričom v aspoň jednom prípade nastáva rovnosť. Stále platí $yz \geq 6$, avšak $13x'^2 + 10y^2 + 5z^2 < 13x^2 + 10y^2 + 5z^2$.

Ak je to premenná y alebo z, postupujeme analogicky. Každú trojicu (x, y, z) tak vieme touto úvahou, príp. ešte jej zopakovaním, nahradiť trojicou, pri ktorej v aspoň dvoch nerovnostiach nastáva rovnosť, pričom nestúpne hodnota skúmaného výrazu. Preto sa stačí obmedziť na trojice, kde aspoň v dvoch zo zadaných nerovností nastáva rovnosť.

Rozoberme prípady:

- Nech $xy = 2$ a $xz = 3$.
  Platí teda $y = 2/x$ a $z = 3/x$, takže
  $$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = 13x^2 + \frac{40}{x^2} + \frac{45}{x^2} = 13x^2 + \frac{85}{x^2}.$$
  Ostáva nám teda minimalizovať výraz s jednou premennou x, pričom
  $$6 \leq yz = \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{x} = \frac{6}{x^2},$$
  t. j. $x \leq 1$. Výraz $13x^2 + \frac{85}{x^2}$ teda minimalizujeme na intervale $(0, 1]$. Nech f je funkcia definovaná $f(x) = 13x^2 + \frac{85}{x^2}$. Podľa vyššie uvedeného tvrdenia funkcia f nadobúda minimum v $\sqrt[4]{85/13}$, čo je viac ako 1, a na intervale $(0, \sqrt[4]{85/13}]$ je klesajúca. Preto minimum na intervale $(0, 1]$ nadobudne f v hraničnej hodnote 1. Vtedy $y = 2$ a $z = 3$ a $f(1) = 13 \cdot 1^2 + \frac{85}{1^2} = 98$.
- Nech $xy = 2$ a $yz = 6$.
  Platí teda $x = 2/y$ a $z = 6/y$, takže
  $$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = \frac{52}{y^2} + 10y^2 + \frac{180}{y^2} = 10y^2 + \frac{232}{y^2}.$$
  Ostáva nám teda minimalizovať výraz s jednou premennou y, pričom
  $$3 \leq xz = \frac{2}{y} \cdot \frac{6}{y} = \frac{12}{y^2},$$
  t. j. $y \leq 2$. Výraz $10y^2 + \frac{232}{x^2}$ teda minimalizujeme na intervale $(0, 2]$. Nech g je funkcia definovaná $g(y) = 10y^2 + \frac{232}{y^2}$. Podľa vyššie uvedeného tvrdenia funkcia g nadobúda minimum v $\sqrt[4]{232/10}$, čo je viac ako 2, a na intervale $(0, \sqrt[4]{232/10}]$ je klesajúca. Preto minimum na intervale $(0, 2]$ nadobudne g v hraničnej hodnote 2. Vtedy $x = 1$ a $z = 3$ a $g(2) = 10 \cdot 2^2 + \frac{232}{2^2} = 98$.
- Nech $xz = 3$ a $yz = 6$.
  Platí teda $x = 3/z$ a $y = 6/z$, takže
  $$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 = \frac{117}{z^2} + \frac{360}{z^2} + 5z^2 = 5z^2 + \frac{477}{z^2}.$$
  Ostáva nám teda minimalizovať výraz s jednou premennou z, pričom
  $$2 \leq xy = \frac{3}{z} \cdot \frac{6}{z} = \frac{18}{z^2},$$
  t. j. $z \leq 2$. Výraz $5z^2 + \frac{232}{z^2}$ teda minimalizujeme na intervale $(0, 2]$. Nech h je funkcia definovaná $h(z) = 5z^2 + \frac{477}{y^2}$. Podľa vyššie uvedeného tvrdenia funkcia h nadobúda minimum v $\sqrt[4]{477/5}$, čo je viac ako 3, a na intervale $(0, \sqrt[4]{477/5}]$ je klesajúca. Preto minimum na intervale $(0, 3]$ nadobudne h v hraničnej hodnote 3. Vtedy $x = 1$ a $y = 2$ a $h(3) = 5 \cdot 3^2 + \frac{477}{3^2} = 98$.

Vo všetkých troch prípadoch sme dostali, že hodnota skúmaného výrazu je aspoň 98. Navyše sme ukázali, že táto hodnota je dosiahnutá v prípade $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Poznámka:

Rozbor jednotlivých prípadov vieme skrátiť, ak uhádneme minimum (trebárs na základe náčrtu grafu funkcie). Napr. v prvom prípade stačí dokázať, že $13x^2 + 85/x^2 \geq 98$. To vieme ekvivalentne upraviť na nerovnosť $(1 - x^2)(85 - 13x^2) \geq 0$, ktorá pre x z $(0, 1]$ zjavne platí.

Poznámka:

Touto metódou sa dajú riešiť aj variácie tejto úlohy, napr. ak by sme miesto výrazu v zadaní mali hľadať najmenšiu možnú hodnotu výrazu $84x^2 + 3y^2 + z^2$. V posledných dvoch prípadoch nám taktiež vyjde najmenšia možná hodnota 105 pre trojicu $(1, 2, 3)$. Avšak v prvom prípade dospejeme k funkcii $84x^2+21/x^2$, ktorá dosahuje najmenšiu možnú hodnotu 84 v prípade $x = \sqrt[4]{21/84} = 1/\sqrt{2}$ (následne $y = 2\sqrt{2}$ a $z = 3\sqrt{2}$, čiže $yz = 12 > 6$). Vidíme, že vo všeobecnosti nemáme zaručené, že najmenšiu hodnotu výrazu dosiahneme vtedy, keď vo všetkých troch nerovnostiach zo zadania nastanú rovnosti. Preto riešenie súťažnej úlohy založené na úvahe, že na dosiahnutie najmenšej hodnoty výrazu musia nastať všetky tri z rovností $xy = 2$, $xz = 3$, $yz = 6$, nie je správne, hoci pre zadaný výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$ vedie k správnemu výsledku.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024