MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie C

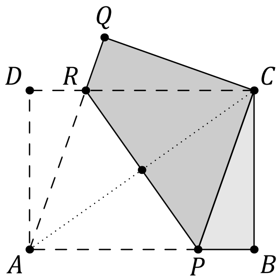
1 Obdĺžnikový list papiera s rôznymi rozmermi a a b preložíme tak, že jeden z jeho rohov splynie s protiľahlým. Dokážte, že obsah vzniknutého päťuholníka je z intervalu $\left(\frac{1}{2}ab, \frac{3}{4}ab\right)$.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Obdĺžnik papiera označme $ABCD$, pričom $|AB| = a$ a $|BC| = b$. Nech po prehnutí roh A splynie s rohom C, priamka tohto prehnutia je teda os úsečky AC. Jej priesečníky so stranami AB a DC označme P, resp. R. Nech Q je obraz bodu D v osovej súmernosti podľa priamky PR. Predmetný päťuholník je teda $PBCQR$.

Najskôr si uvedomme, že každým preložením papiera dostaneme obraz preloženej časti v osovej súmernosti podľa priamky, pozdĺž ktorej papier prekladáme. V našom prípade je štvoruholník $PCQR$, t. j. preložená časť papiera, osovo súmerný, so štvoruholníkom $PADR$ podľa priamky PR. a teda s ním (nepriamo) zhodný.



Bod A po preložení papiera splynie s bodom C, os súmernosti PR je tak osou úsečky AC, a teda prechádza jej stredom E, ktorý je priesečníkom uhlopriečok obdĺžnika $ABCD$. Úsečka PR rozdeľuje obdĺžnik $ABCD$ na dve zhodné časti súmerné podľa stredu $ABCD$, preto $\mathrm{S}(APRD) = \mathrm{S}(PBCR)$. Odtiaľ už vyplýva dolný odhad $\mathrm{S}(PBCQR) > \mathrm{S}(PBCR) = \frac{1}{2}ab$.

Všimnime si, že z osovej súmernosti podľa PR sú trojuholníky ADR a CQR zhodné. Platí teda

$$\mathrm{S}(PBCQR) = \mathrm{S}(PBCR) + \mathrm{S}(CQR) = \frac{1}{2}\mathrm{S}(ABCD) + \mathrm{S}(ARD).$$

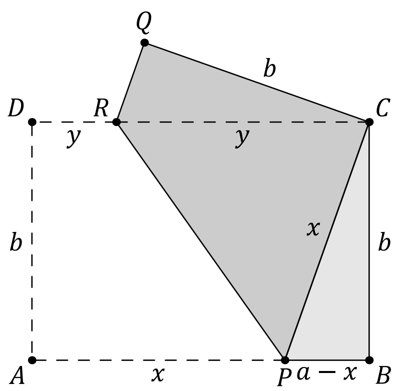
Na dokončenie dôkazu stačí ukázať, že $\mathrm{S}(ARD) < \frac{1}{4}\mathrm{S}(ABCD)$. Keďže $\mathrm{S}(ARD) = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |DR|$ a $\mathrm{S}(ABCD) = |AD|\, cdot\, |CD|$, je posledná nerovnosť ekvivalentná s $|DR| < \frac{1}{2}\,|CD|$, t. j. $|DR| < |CR|$.

Keďže $|CR| = |AR|$ a AR je prepona pravouhlého trojuholníka ARD s odvesnou DR, preto $|DR| < |CR|$.

Riešenie 2:

Použijeme označenie z predchádzajúceho riešenia.

Lichobežník $APRD$ po preložení papiera prejde na lichobežník $CPRQ$, tieto lichobežníky sú preto zhodné, špeciálne platí, že $|QC| = b$. Nech $x = |AP| = |PC|$ a $y = |DR| = |QR|$. Potom $|PB| = a - |AP| = a - x$.



Využitím vzorcov pre obsah lichobežníka a trojuholníka dostávame

$$S(PBCQR) = S(PCQR) + S(PBC) = \frac{(x+y)b}{2} + \frac{(a-x)b}{2} = \frac{yb}{2} + \frac{ab}{2}.$$

Tento výraz je väčší ako $\frac{1}{2}ab$, dolný odhad je teda dokázaný.

Na dokázanie horného odhadu nám stačí ukázať, že $\frac{yb}{2} < \frac{ab}{4}$, čiže $a > 2y$. To vyplýva napríklad z toho, že $a - y$ je dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka CQR, ktorého odvesna QR má dĺžku y, teda $a - y > y$.

Riešenie 3:

Opäť použijeme označenie z predchádzajúceho riešenia.

Podobne ako v prvom riešení vyplýva z osovej súmernosti zhodnosť trojuholníkov CQR a ADR a tiež rovnosti $|AR| = |CR|$ a $|AP| = |CP|$. $APCR$ je teda deltoid, ktorý má navyše protiľahlé strany AP a RC rovnobežné, je to teda kosoštvorec. Odtiaľ už vyplýva, že trojuholníky ADR a CBP sú zhodné podľa vety *sss*.

Teraz vyjadríme obsah päťuholníka $PBCQR$ pomocou dĺžok strán a a b daného obdĺžnika. Označme x dĺžku úsečky AP. Pravouhlý trojuholník PBC má dĺžky strán x, $a - x$ a b. Z Pytagorovej vety dostaneme

$$(a-x)^2 + b^2 = x^2,$$

z čoho po úpravách

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Odtiaľ

$$a - x = a - \frac{a^2 + b^2}{2a} = \frac{2a^2 - \left(a^2 + b^2\right)}{2a} = \frac{a^2 - b^2}{2a},$$

a teda

$$S(PBC) = \frac{1}{2}(a-x)b = \frac{\left(a^2 - b^2\right)b}{4a}$$

a

$$S(APR) = \frac{1}{2}xb = \frac{\left(a^2 + b^2\right)b}{4a}.$$

Preto

$$S(PBCQR) = 2S(PBC) + S(PCR) = 2\frac{\left(a^2 - b^2\right)b}{4a} + \frac{\left(a^2 + b^2\right)b}{4a}$$

$$= \frac{2a^2b - 2b^3 + a^2b + b^3}{4a} = \frac{3a^2b - b^3}{4a} = \frac{3ab}{4} - \frac{b^3}{4a}.$$

Zjavne platí

$$\frac{3ab}{4} - \frac{b^3}{4a} < \frac{3ab}{4},$$

čím je dokázaný horný odhad zo zadania. Na dôkaz dolného odhadu stačí ukázať, že

$$\frac{3ab}{4} - \frac{b^3}{4a} > \frac{ab}{2},$$

čiže ekvivalentne

$$\frac{ab}{4} > \frac{b^3}{4a},$$

$$a^2 > b^2,$$

$$a > b,$$

čo platí podľa zadania.

---

2 Nech a a b sú prirodzené čísla také, že $a > b$, $a + b$ je deliteľné 9 a $a - b$ je deliteľné 11.

a) Určte najmenšiu možnú hodnotu čísla $a + b$.

b) Dokážte, že čísla $a + 10b$ a $b + 10a$ sú deliteľné 99.

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

a) Z druhej podmienky zo zadania dostávame, že $a + b$ je násobok 9. Z prvej a tretej podmienky máme $11 \mid a - b > 0$, t. j. $a - b \geq 11$, takže aj $a + b > a - b \geq 11$. Preto $a + b \geq 18$.

V prípade $a + b = 18$ platí $a - b < a + b < 18$, takže $a - b = 11$, pretože $11 \mid a - b > 0$. Riešením sústavy rovníc $a + b = 18$ a $a - b = 11$ dostávame $a = \frac{29}{2}$, čo nie je prirodzené číslo.

V prípade $a + b = 27$ už získame vyhovujúce riešenie $a = 19$ a $b = 8$, a to riešením sústavy $a + b = 27$ a $a - b = 11$.

Hľadaná hodnota je teda 27.

b)
- Keďže $a + b$ je deliteľné 9, aj $(a + b) + 9b$ čiže $a + 10b$ je deliteľné 9. Keďže $a - b$ je deliteľné 11, aj $(a - b) + 11b$ čiže $a + 10b$ je deliteľné 11. A pretože 9 a 11 sú nesúdeliteľné, $a + 10b$ je deliteľné aj $9 \cdot 11$ čiže 99.
- Keďže $a + b$ je deliteľné 9, aj $(a + b) + 9a$ čiže $b + 10a$ je deliteľné 9. Keďže $a - b$ je deliteľné 11, aj $b - a$ je deliteľné 11, a teda aj $(b - a) + 11a$ čiže $b + 10a$ je deliteľné 11. A pretože 9 a 11 sú nesúdeliteľné, $b + 10a$ je deliteľné aj $9 \cdot 11$ čiže 99.

Riešenie 2:

b) Keďže $(a + 10b) + (b + 10a) = 11(a + b)$ a podľa zadania $9 \mid a + b$, číslo $(a + 10b) + (b + 10a)$ je súčasne deliteľné 9 aj 11, a teda aj číslom 99.

Podobne $(b + 10a) - (a + 10b) = 9(a - b)$ a podľa zadania $11 \mid a - b$, takže číslo $(b + 10a) - (a + 10b)$ je súčasne deliteľné 9 aj 11, a teda aj číslom 99.

Keďže 99 je nepárne číslo a delí súčet aj rozdiel daných dvoch čísel, aj čísla samotné sú deliteľné 99.

Riešenie 3:

b) Podľa zadania platí $a + b = 9c$ a $a - b = 11d$ pre vhodné prirodzené čísla c a d. Sčítaním, resp. odčítaním týchto dvoch rovností dostaneme po následnom vydelení 2

$$a = \frac{9c + 11d}{2},$$

$$b = \frac{9c - 11d}{2}.$$

Z toho

$$a + 10b = \frac{9c + 11d}{2} + 10 \cdot \frac{9c - 11d}{2} = \frac{1}{2}(9c + 11d + 90c - 110d) = \frac{99}{2}(c - d),$$

$$b + 10a = \frac{9c - 11d}{2} + 10 \cdot \frac{9c + 11d}{2} = \frac{1}{2}(90c + 110d + 9c - 11d) = \tfrac{99}{2}(c + d).$$

Keďže ľavá strana je celé číslo a čísla 99 a 2 sú nesúdeliteľné, sú čísla $c + d$ aj $c - d$ párne, takže obe čísla $a + 10b$ a $b + 10a$ sú násobky 99.

---

3 Ktoré obdĺžniky $a \times b$, pričom $a \leq b$, sa dajú rozdeliť na štvorce 1×1 pomocou práve 110 úsečiek jednotkovej dĺžky?

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Nech je výška obdžnika a a jeho šírka b. Vodorovné úsečky ležia v b stĺpcoch, každý z nich obsahuje $a - 1$ úsečiek, zvislé úsečky ležia v a riadkoch, každý z nich obsahuje $b - 1$ úsečiek. Celkový počet úsečiek potrebných na rozdelenie obdĺžnika $a \times b$ je teda $a(b - 1) + b(a - 1)$.

Hľadáme teda prirodzené čísla a a b také, že

$$a(b - 1) + b(a - 1) = 110.$$

Ekvivalentne

$$2ab - a - b = 110,$$

$$4ab - 2a - 2b = 220,$$

$$4ab - 2a - 2b + 1 = 221,$$

$$(2a - 1)(2b - 1) = 221.$$

Keďže sú čísla $2a-1$ a $2b-1$ prirodzené, ekvivalentne platí

$$(2a-1, 2b-1) \in \{(1, 221), (13, 17)\},$$

$$(2a, 2b) \in \{(2, 222), (14, 18)\},$$

$$(a, b) \in \{(1, 111), (7, 9)\}.$$

Všetky vyhovujúce obdĺžniky sú teda 1×111 a 7×9.

Riešenie 2:

Podobne ako v prvom riešení hľadáme všetky dvojice prirodzených čísel (a, b) také, že

$$a(b-1) + b(a-1) = 110.$$

Ekvivalentne

$$2ab - a - b = 110,$$

$$a(2b-1) = 110 + b,$$

$$a = \frac{110+b}{2b-1},$$

$$2a = \frac{220+2b}{2b-1},$$

$$2a = \frac{221+(2b-1)}{2b-1},$$

$$2a = \frac{221}{2b-1} + 1,$$

$$(2a-1) = \frac{221}{2b-1},$$

$$(2a-1)(2b-1) = 221.$$

Ďalej pokračujeme ako v riešení 1.

---

4 Šachovnicovo ofarbenú tabuľku 4×4 s čiernym ľavým horným políčkom vypĺňame jednotkami a nulami. V každom štvorci 2×2, ktorý má čierne ľavé horné políčko, sú 2 nuly a 2 jednotky. Koľkými rôznymi spôsobmi je možné tabuľku vyplniť?

(Ján Mazák)

Riešenie:

Začneme tým, že vyplníme stredový štvorec 2×2 požadovaným spôsobom. Zo 4 políčok vyberáme 2, kde budú jednotky (zvyšné dve potom vyplnia nuly), máme teda $\binom{4}{2}$ možností, ako to urobiť.

Každý z rohových štvorcov 2×2 má po vyplnení stredového štvorca už jedno políčko vyplnené. Ak vyplnené políčko obsahuje jednotku, vyberáme 1 zo zvyšných 3 políčok pre druhú jednotku, ak vyplnené políčko obsahuje nulu, vyberáme 1 zo zvyšných 3 políčok pre druhú nulu. Doplnenie každého z týchto štyroch rohových štvorcov je nezávislé od vyplnenia ostatných rohových štvorcov. Výsledok je preto $6 \cdot 3^4 = 486$.

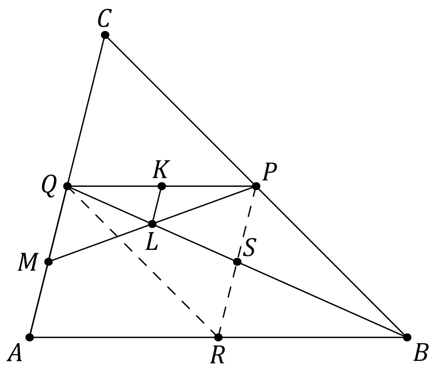
---

5 Nech P a Q sú postupne stredy strán BC a AC trojuholníka ABC. Nech rovnobežka s AC prechádzajúca stredom K úsečky PQ pretína priamku BQ v bode L a priamka PL pretína úsečku AC v bode M. Dokážte, že M je stred úsečky AQ.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Nech R je stred strany AB. Potom úsečky PQ, QR, RP sú stredné priečky trojuholníka ABC, takže $ARPQ$ a $RBPQ$ sú oba rovnobežníky, pretože stredná priečka a polovica strany, s ktorou je rovnobežná, sú rovnako dlhé. Nech S je stred rovnobežníka $RBPQ$, takže je aj stredom jeho uhlopriečky PR a BQ, pretože uhlopriečky v rovnobežníku sa rozpoľujú.



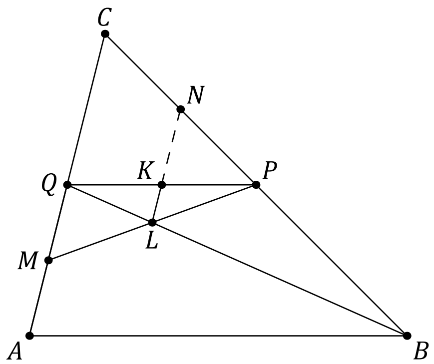
Keďže úsečka KL je rovnobežná s QM aj s PS a prechádza stredom úsečky PQ, je to stredná priečka trojuholníkov PQS aj PQM. Platí teda

$$|QM| = 2\,|KL| = |PS| = \frac{1}{2}\,|PR| = \frac{1}{2}\,|QA|\,,$$

takže M je stred úsečky AQ.

Riešenie 2:

Označme N priesečník priamky KL so stranou BC. Keďže priamka KL prechádza stredom úsečky PQ a je rovnobežná s QC, je úsečka NK strednou priečkou v trojuholníku PCQ. Súčasne je KL strednou priečkou trojuholníka PQM. Z toho vyplýva, že NL je stredná priečka trojuholníka PCM.



Z rovnobežnosti úsečiek NL a CQ vyplýva, že trojuholníky BNL a BCQ sú rovnoľahlé so stredom B a koeficientom $3 : 4$, pretože v rovnakom pomere sú dĺžky strán BN a BC oboch trojuholníkov. Platí teda $|NL| : |CQ| = 3 : 4$. Keďže úsečka NL je strednou priečkou trojuholníka PCM, platí

$$|CM| = 2 \cdot |NL| = 2 \cdot \frac{3}{4}\,|CQ| = \frac{3}{4} \cdot 2\,|CQ| = \frac{3}{4}\,|AC|\,,$$

teda

$$|AM| = \frac{1}{4}\,|AC| = \frac{1}{2}\,|AQ|\,.$$

Riešenie 3:

Úsečka QP je strednou priečkou trojuholníka ABC, je tak rovnobežná so stranou AB a má polovičnú dĺžku. Označme U priesečník priamky PL s priamkou AB. Z rovnoľahlosti trojuholníkov BLU a QLP so stredom L je priesečník T priamok KL a AB stredom úsečky UB. Platí

$$|AT| = |QK| = \frac{1}{2}\,|QP| = \frac{1}{4}\,|AB|\,,$$

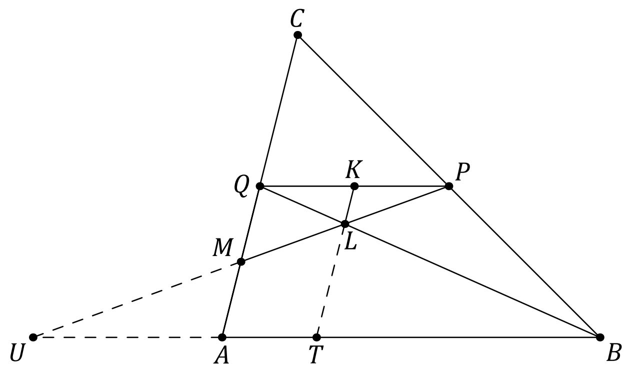
teda

$$|UT| = |TB| = |AB| - |AT| = \frac{3}{4}\,|AB|\,,$$

odkiaľ dostávame

$$|UA| = |UT| - |AT| = \frac{1}{2}\,|AB| = |PQ|\,.$$

Trojuholníky UAM a PQM sú potom rovnoľahlé so stredom M, a keďže ich zodpovedajúce strany UA a PQ sú zhodné, platí aj $|AM| = |MQ|$, takže M je stred AQ.



---

6 Štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ s nenulovými ciframi nazveme *zrkadliteľné* práve vtedy, keď pripočítaním 9-násobku nejakého trojciferného čísla zapísaného pomocou troch rovnakých cifier vznikne číslo $\overline{dcba}$. Koľko zrkadliteľných čísel existuje?

(Mária Dományová, Patrik Bak)

Riešenie:

Číslo $\overline{abcd}$ je teda zrkadliteľné práve vtedy, keď existuje nenulová cifra x taká, že

$$\overline{abcd} + 9 \cdot \overline{xxx} = \overline{dcba},$$

ekvivalentne

$$(1000a + 100b + 10c + d) + 9(100x + 10x + x) = 1000d + 100c + 10b + a,$$

$$999a - 999d + 9 \cdot 111x = 90c - 90b,$$

$$999(a - d + x) = 90(c - b),$$

$$111(a - d + x) = 10(c - b).$$

Keďže čísla 111 a 10 sú nesúdeliteľné, 111 delí $c - b$, a keďže sú to cifry, platí $c - b = 0$, t. j. $b = c$. Za tejto podmienky ďalej ekvivalentne

$$111(a - d + x) = 10 \cdot 0,$$

$$111(a - d + x) = 0,$$

$$a - d + x = 0,$$

$$a + x = d.$$

Číslo $\overline{abcd}$ je teda zrkadliteľné práve vtedy, keď $b = c$ a existuje nenulová cifra x taká, že $a + x = d$, t. j. práve vtedy, keď $b = c$ a $a < d$.

Dvojíc nenulových cifier (b, c) takých, že $b = c$, je 9 a dvojíc nenulových cifier (a, d) takých, že $a < d$, je $\binom{9}{2}$. Tieto podmienky sú nezávislé, takže počet zrkadliteľných čísel je $9 \cdot \binom{9}{2}$ čiže 324.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024