1. Kvalifikačné kolo MO
Teória čísel

12. 11. 2024

Úloha 1. Pre kladné celé číslo n označme $\alpha(n)$ aritmetický priemer všetkých jeho kladných deliteľov a $\beta(n)$ aritmetický priemer všetkých kladných celých čísel k takých, že $k \leq n$ a $\mathrm{NSD}(k, n) = 1$. Napríklad

$$\alpha(4) = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3}, \ \beta(4) = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré platí $\alpha(n) = \beta(n)$.

Úloha 2. Nech x, y, z, p sú kladné celé čísla také, že $0 < x < y < z < p$ a p je prvočíslo. Predpokladajme, že čísla x^3, y^3 a z^3 dávajú rovnaký zvyšok po delení p. Dokážte, že $x + y + z \mid x^2 + y^2 + z^2$.

Úloha 3. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$f(a) \mid f(b) + a - b$$

platí pre všetky dvojice kladných celých čísel a, b.

Poznámka. Zápis $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ znamená, že funkcia f priraďuje každému kladnému celému číslu práve jedno kladné celé číslo. Zápis $f(a)$ značí funkčnú hodnotu funkcie f pre číslo a (a analogicky pre b).