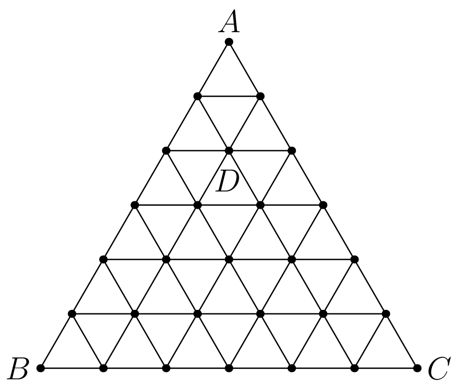
3. kvalifikačné kolo MO
Kombinatorika

22. 1. 2025

Úloha 1. Dvojicu celých čísel nazveme *hravou*, pokiaľ je súčet tejto dvojice čísel deliteľný piatimi alebo siedmimi. Koľko najviac čísel spomedzi $1, 2, \ldots, 420$ môžeme napísať na tabuľu bez toho, aby na tabuli vznikla hravá dvojica čísel? Každé číslo môžeme napísať najviac raz.

Úloha 2. Trojuholník ABC so stranou dlhou n je rozdelený pomocou úsečiek rovnobežných s jeho stranami na n^2 rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1. Body, ktoré sú vrcholom niektorého z týchto jednotkových trojuholníkov, nazveme *mrežové body*. Jediný mrežový bod vo vzdialenosti $\sqrt{3}$ od bodu A označíme D (pozri tiež obrázok pre $n = 6$).

Do bodov A, B, C, D napíšeme číslo 1 a do zvyšných mrežových bodov číslo 0. V jednom ťahu vieme vybrať štyri čísla v mrežových bodoch tvoriacich kosoštvorec so stranou dĺžky 1 a buď všetky štyri čísla zväčšiť o 1, alebo všetky štyri čísla zmenšiť o 1. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré možno po konečnom počte ťahov dostať vo všetkých mrežových bodoch nuly.



Úloha 3. Nech $n \geq 2$ je celé číslo. V Kocúrkove je $3n$ dedín a žiadne mestá. Alica hrá s kráľom Kocúrkova hru, ktorá trvá n kôl. V každom kole najprv Alica zavedie leteckú linku medzi dvoma obcami, medzi ktorými ešte žiadna linka nie je. Potom kráľ niektorú dedinu povýši na mesto. Na konci hry Alica získa bod za každú leteckú linku, ktorá spája dedinu s mestom. Dokážte, že bez ohľadu na ťahy kráľa vie Alica získať aspoň $\frac{1}{6}(n-1)$ bodov.