2. Kvalifikačné kolo MO
Geometria

02. 12. 2024

Úloha 1. Uhlopriečky AC a BD tetivového štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode M. Osi uhlov $\sphericalangle CAD$ a $\sphericalangle ACB$ pretínajú kružnicu opísanú $ABCD$ druhýkrát postupne v bodoch E a F. Dokážte, že priamka EF je kolmá na os uhla AMD.

Úloha 2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Pre vnútorný bod P tohto trojuholníka nech sú P_a, P_b, P_c obrazy bodu P v osových súmernostiach podľa strán trojuholníka BC, AC, AB. Dokážte, že existuje práve jeden bod X taký, že X je vnútorným bodom trojuholníka $P_aP_bP_c$ pre akýkoľvek výber bodu P vnútri trojuholníka ABC.

Úloha 3. V rovine sú dané kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 a k_5 s rovnakým polomerom také, že kružnice k_i a k_{i+1} sa pretínajú v bodoch P_i a Q_i (pre $1 \leq i \leq 4$) a naviac k_5 a k_1 sa pretínajú v bodoch P_5 a Q_5. Je daný bod A_1 na kružnici k_1. Potom zostrojíme body A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} postupne na kružniciach k_2, k_3, k_4, k_5, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_1 tak, že trojice bodov

$$(A_1, P_1, A_2), (A_2, P_2, A_3), (A_3, P_3, A_4), (A_4, P_4, A_5), (A_5, P_5, A_6),$$

$$(A_6, Q_1, A_7), (A_7, Q_2, A_8), (A_8, Q_3, A_9), (A_9, Q_4, A_{10}), (A_{10}, Q_5, A_{11})$$

sú kolineárne. Dokážte, že $A_1 = A_{11}$.
Pri riešení môžete predpokladať, že žiadne dva z bodov P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10} nesplývajú.