MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

1 Nájdite všetky dvojciferné prirodzené čísla, ktoré majú nasledujúcu vlastnosť: Keď pred číslo pripíšeme súčin jeho prvej cifry a jeho prvej cifry zväčšenej o 1, dostaneme druhú mocninu pôvodného čísla.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Cifru na mieste desiatok označíme a, cifru na mieste jednotiek označíme b. Hľadané čísla sú v tvare $10a + b$, kde $a \in \{1, \dots, 9\}$, $b \in \{0, \dots, 9\}$ a platí

$$100a(a + 1) + (10a + b) = (10a + b)^2.$$

Po úpravách dostávame:

$$100a^2 + 100a + 10a + b = 100a^2 + 20ab + b^2,$$

$$110a + b = 20ab + b^2.$$

Číslo v tejto rovnosti je viacciferné. Aby súhlasili cifry na mieste jednotiek, musí byť cifra na mieste jednotiek v b^2 práve b. Tejto podmienke vyhovujú iba cifry 0, 1, 5, 6. Postupne rozoberieme všetky tieto prípady:

- V prípade $b = 0$ dostávame
$$110a = 0,$$
$$a = 0,$$
čo nevyhovuje.
- V prípade $b = 1$ dostávame
$$110a + 1 = 20a + 1,$$
$$90a = 0,$$
$$a = 0,$$
čo nevyhovuje.
- V prípade $b = 5$ dostávame
$$110a + 5 = 100a + 25,$$
$$10a = 20,$$
$$a = 2,$$
Dostávame tak číslo 25, ktoré vyhovuje, lebo súčin jeho prvej cifry a jeho prvej cifry zväčšenej o 1 je 6 a $625 = 25^2$.
- V prípade $b = 6$ dostávame
$$110a + 6 = 120a + 36,$$
$$-30 = 10a,$$
$$-3 = a,$$
čo nevyhovuje.

Jediné číslo s vlastnosťou zo zadania je teda 25.

Pokyny:

2 body za formuláciu rovnice a jej úpravy; 2 body za určenie možností cifry b; 2 body za vyriešenie úlohy a záver.

Bez neznámych a a b sa úloha dá vyriešiť systematickým vyskúšaním všetkých možností. V takom prípade hodnoťte podľa úplnosti postupu a komentára.

2 Nájdite všetky trojice navzájom rôznych čísel takých, že:

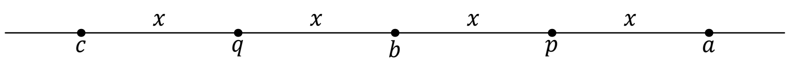
- jedno z nich je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch,
- súčet aritmetického priemeru najväčšieho a stredného čísla a aritmetického priemeru stredného a najmenšieho čísla je 628 a rozdiel týchto dvoch aritmetických priemerov je 83.

Na poradí čísel v trojici nezáleží.

(Karel Pazourek)

Riešenie 1:

Ak by sme zakreslili trojicu hľadaných čísel na číselnú os, tak z prvej podmienky vieme, že jedno z čísel trojice (označme ho b) je presne v strede medzi zvyšnými dvoma číslami (označme najväčšie z nich a a najmenšie z nich c). Aritmetické priemery, o ktorých sa hovorí v druhej podmienke, sú taktiež presne v strede medzi uvedenými dvojicami čísel. Označme ich postupne p a q. Čísla znázornené na číselnej osi tak tvoria postupnosť piatich čísel, medzi ktorými sú rovnaké rozostupy, ktorých veľkosť označíme x.



Z uvedených vzťahov vyplýva, že číslo b je v strede medzi číslami p a q, čiže je ich aritmetickým priemerom. Zo zadania vieme, že súčet týchto dvoch čísel je 628, a teda $b = 628/2 = 314$. Takisto vieme, že $p - q = 2x = 83$. Teda

$$a = 314 + 2x = 314 + 83 = 397,$$

$$c = 314 - 2x = 314 - 83 = 231.$$

Hľadané tri čísla sú teda 397, 314, 231.

A naozaj, aritmetický priemer 397 a 231 je 314, aritmetický priemer 397 a 314 je 355,5, aritmetický priemer 314 a 231 je 272,5, súčet 355,5 a 272,5 je 628 a ich rozdiel je 83.

Riešenie 2:

Hľadané tri čísla od najväčšieho po najmenšie označíme a, b, c. Prostredné číslo je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch, teda $b = \frac{a+c}{2}$. Aritmetický priemer prvého a druhého čísla je $\frac{a+b}{2}$, pričom

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a + \frac{a+c}{2}}{2} = \frac{3a+c}{4},$$

aritmetický priemer druhého a tretieho čísla je $\frac{b+c}{2}$, pričom

$$\frac{b+c}{2} = \frac{\frac{a+c}{2} + c}{2} = \frac{a+3c}{4}.$$

Z informacií o súčte týchto dvoch priemerov dostávame

$$\frac{3a+c}{4} + \frac{a+3c}{4} = 628,$$

$$\frac{(3a+c)+(a+3c)}{4} = 628,$$

$$\frac{4a+4c}{4} = 628,$$

$$a + c = 628,$$

a o ich rozdiele

$$\frac{3a+c}{4} - \frac{a+3c}{4} = 83,$$

$$\frac{(3a+c)-(a+3c)}{4} = 628,$$

$$\frac{2a-2c}{4} = 83,$$

$$\frac{a-c}{2} = 83,$$

$$a - c = 166.$$

Sčítaním týchto dvoch výsledkov dostávame

$$(a + c) + (a - c) = 628 + 166,$$

$$2a = 794,$$

$$a = 397,$$

a ich odčítaním

$$(a + c) - (a - c) = 628 - 166,$$

$$2c = 462,$$

$$c = 231.$$

Hľadané tri čísla sú teda 397, 314, 231.

A naozaj, aritmetický priemer 397 a 231 je 314, aritmetický priemer 397 a 314 je 355,5, aritmetický priemer 314 a 231 je 272,5, súčet 355,5 a 272,5 je 628 a ich rozdiel je 83.

Pokyny:

2 body za formuláciu pomocou neznámych; 2 body za čiastočné postrehy a úpravy; 2 body za výsledok a kvalitu komentára.

---

3 Včera vydojili na farme Doj dvakrát viac mlieka ako na farme Hoj a na farme Loj dvakrát viac mlieka ako na farme Doj. Každá farma poslala časť vydojeného mlieka na výrobu masla. Farma Doj poslala na výrobu masla 7/8 svojho mlieka a farma Hoj 3/4 svojho mlieka. Z mlieka vydojeného na všetkých troch farmách išlo na výrobu masla dokopy 90 %.

Akú časť svojho mlieka poslala na výrobu masla farma Loj?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Množstvo mlieka vydojeného na farme Hoj označíme h. Množstvo mlieka vydojeného na farme Doj bolo $2h$, na farme Loj $4h$. Na všetkých troch farmách dokopy bolo vydojené $7h$ mlieka.

Množstvo mlieka, ktoré poslala na výrobu masla farma Doj, bolo $\frac{7}{8} \cdot 2h$ čiže $\frac{7}{4}h$. Farma Hoj poslala $\frac{3}{4}h$. Zo všetkých troch fariem išlo dokopy 90 % · $7h$ čiže $6{,}3h$. Množstvo mlieka, ktoré išlo na výrobu masla z farmy Loj, označme l, potom

$$l = 6{,}3h - \frac{7}{4}h - \frac{3}{4}h = \frac{63}{10}h - \frac{10}{4}h = \frac{126 - 50}{20}h = \frac{76}{20}h = \frac{38}{10}h = 3{,}8h.$$

Celkovo sa na farme Loj vydojilo $4h$, teda na výrobu masla poslala farma Loj $\frac{3{,}8h}{4h}$ čiže 95 % svojho mlieka.

Pokyny:

2 body za formuláciu pomocou neznámych; 2 body za čiastočné postrehy a úpravy; 2 body za výsledok a kvalitu komentára.

---

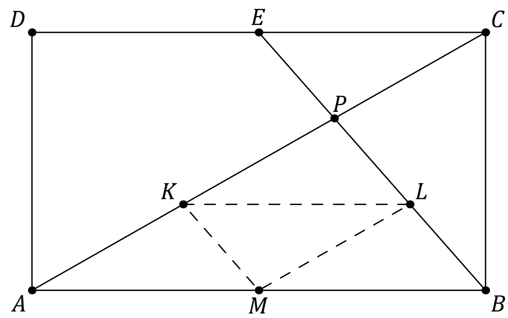
4 Obdĺžnik $ABCD$ má obsah 82 cm^2. Bod E je stredom strany CD a bod P je priesečníkom úsečiek AC a BE.

Určte obsah trojuholníka ABP.

(Erika Novotná)

Riešenie 1:

Úsečky AB a CE sú rovnobežné a platí, že $|AB| = 2\,|CE|$. Preto je trojuholník CEP zhodný s priečkovými trojuholníkmi trojuholníka ABP, t. j. s trojuholníkmi KLP, AMK, MBL a LKM určenými strednými priečkami ABP:



Teda $|AK| = |KP| = |PC|$, z čoho $|AP| = \frac{2}{3}|AC|$. Trojuholníky ABP a ABC majú spoločný vrchol B a k nemu protiľahlé strany ležia na tej istej priamke. preto

$$\mathrm{S}(ABP) = \frac{2}{3}\mathrm{S}(ABC).$$

Trojuholník ABC je polovicou obdĺžnika $ABCD$, teda platí

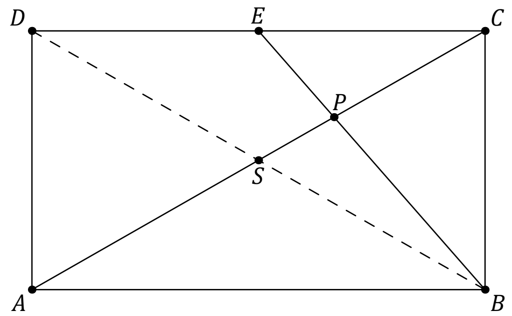
$$\mathrm{S}(ABC) = \frac{1}{2}\mathrm{S}(ABCD).$$

Z toho dostávame

$$\mathrm{S}(ABP) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{S}(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot 82\,\mathrm{cm}^2 = 27{,}\overline{3}\,\mathrm{cm}^2.$$

Riešenie 2:

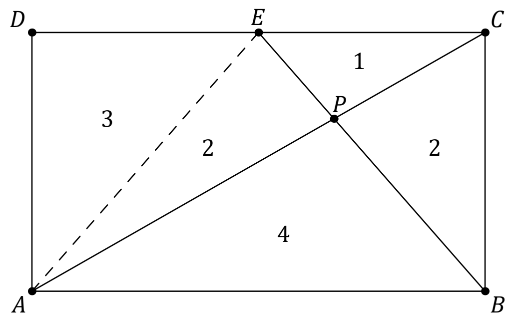
Uhlopriečky obdĺžnika $ABCD$ sa pretínajú v bode S, ktorý leží v strede každej z nich. Bod E je stred úsečky CD. Preto sú úsečky SC a BE ťažnicami trojuholníka BCD, teda ich priesečník P je ťažiskom tohto trojuholníka.



Keďže je bod P ťažiskom, platí $|SC| = 3\,|SP|$. Navyše $|AS| = |SC|$, teda $|AP| = 4\,|SP|$ a $|AC| = 6\,|SP|$. Odtiaľ dostávame $|AP| = \frac{2}{3}|AC|$ a ďalej postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Poznámka:

So znalosťou pomeru $|AP| : |AC| = 2 : 3$ alebo $|AP| : |PC| = 2 : 1$ je možné obdĺžnik $ABCD$ rozdeliť na trojuholníky so známymi pomermi obsahov:



Odtiaľ sa dá vyjadriť pomer obsahu trojuholníka ABP a obsahu obdĺžnika $ABCD$ ako $4 : 12$ čiže $1 : 3$.

Poznámka:

Pomer $|AP| : |PC| = 2 : 1$ je možné odvodiť aj z podobnosti (rovnoľahlosti) trojuholníkov ABP a CEP, t. j. z faktu, že úsečky AB a CE sú rovnobežné a $|AB| = 2\,|CE|$.

Pokyny:

Hodnotenie:

2 body za rozbor a čiastkové postrehy; 2 body za pomocné vzťahy; 2 body za výsledok a kvalitu komentára.

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov.

Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Opäť upozorňujeme na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO https://skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete.

Prosíme, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6.–8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autorka z SK MO: Erika Novotná
- recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančigová, Stanislav Krajči
- preklad: Erika Novotná