2011/2012
61. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 18. – 25. 4. 2012.*)

1. Nech W je vnútorný bod trojuholníka ABC. Bodom W vedieme priamky p_1, p_2, p_3 rovnobežné so stranami trojuholníka AB, BC a CA, ktoré pretínajú strany trojuholníka ABC postupne v bodoch K ($p_1 \cap CA$), N ($p_1 \cap BC$), L ($p_2 \cap AB$), O ($p_2 \cap CA$), M ($p_3 \cap BC$) a P ($p_3 \cap AB$). Uhlopriečky KB, LC a MA lichobežníkov $ABNK$, $BLOC$ a $CMPA$ delia trojuholník ABC na sedem častí, z ktorých štyri sú trojuholníky. Dokážte, že súčet obsahov troch z týchto trojuholníkov, ktoré ležia pri stranách trojuholníka ABC, je rovný obsahu štvrtého (vnútorného).

2. Dané je prirodzené číslo $n \geqq 2$. Množina M uzavretých intervalov má tieto vlastnosti:
- (V1) Pre každý interval $\langle u, v\rangle \in M$ platí, že u aj v sú prirodzené čísla, $1 \leqq u < v \leqq n$.
- (V2) Pre každé dva rôzne intervaly $I \in M$ a $J \in M$ platí $I \subset J$, alebo $J \subset I$, alebo $I \cap J = \emptyset$.

Určte najväčší možný počet prvkov množiny M.

3. Nájdite najmenšie reálne číslo k také, že platí: ak je daný ľubovoľný trojuholník ABC so stranami $a \leqq b \leqq c$, tak existuje
- a) rovnoramenný trojuholník XYZ,
- b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník XYZ,

ktorý obsahuje trojuholník ABC, a pre ktorého obsah platí

$$S_{XYZ} \leqq kb^2.$$

- c) Ako sa zmení výsledok v časti b), ak predpokladáme, že trojuholník ABC je ostrouhlý?

4. Dané sú kladné celé čísla n a k, $n > k$. Dokážte, že existujú celé kladné čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ také, že nerovnosť

$$k(c_1 + \cdots + c_k) + (n-k)(c_{k+1} + \cdots + c_n) \leqq p(c_1 + \cdots + c_p) + (n-p)(c_{p+1} + \cdots + c_n)$$

platí pre všetky $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

5. Dané sú dve kružnice, ktoré majú vnútorný dotyk v bode M a priamka, ktorá sa dotýka vnútornej kružnice v bode P a pretína vonkajšiu kružnicu v bodoch Q a R. Dokážte, že uhly QMP a RMP sú zhodné.

6. Nájdite najväčšie prirodzené číslo k pre ktoré platí: Množina prirodzených čísel sa dá rozdeliť na k navzájom disjunktných podmnožín A_1, A_2, $\ldots$, A_k takých, že pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 15$ a všetky $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existujú dva rôzne prvky z množiny A_i, ktorých súčet je n.

7. Nech n je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x a y platí

$$f(x+y+f(y)) = f(x) + ny.$$

8. Nájdite minimum výrazu $a^4+b^4+c^4-3abc$ pre reálne čísla a, b, c spĺňajúce podmienky $a \geqq 1$ a $a+b+c=0$.

9. Nech $ABCDE$ je tetivový päťuholník. Označme a, b, c, d postupne vzdialenosti priamok BC, CD, DE a BE od bodu A. Vyjadrite d pomocou a, b, c.

10. Šachovnica 8×8 je bez medzier pokrytá 32-mi kameňmi domina. Potom k šachovnici pridáme na koniec prvého riadka deviate políčko. Je dovolené vziať ľubovoľný kameň domina a umiestniť ho na ľubovoľné dve prázdne susedné políčka upravenej šachovnice. Dokážte, že takými ťahmi sa dajú všetky kamene domina uložiť vodorovne.

11. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo d existuje také prirodzené číslo n, ktoré je deliteľné číslom d, a aj číslo, ktoré vznikne vyškrtnutím vhodnej nenulovej číslice z čísla n, je deliteľné číslom d.

12. Nech x, y a z sú kladné celé čísla také, že $1/x - 1/y = 1/z$. Nech d je najväčším spoločným deliteľom x, y a z. Dokážte, že obe čísla $dxyz$ a $d(y-x)$ sú štvorcami celých čísel.

13. Nájdite všetky konečné množiny A nezáporných reálnych čísel, pre ktoré platia obe podmienky:

- množina A obsahuje aspoň 4 čísla;
- pre ľubovoľne 4 rôzne čísla $a, b, c, d \in A$ je číslo $ab+cd$ tiež prvkom množiny A.

14. Tri rôzne body A, B a C ležia na priamke v tomto poradí. Nech k je kružnica prechádzajúca cez A a C, ktorej stred neleží na priamke AC. Dotyčnice ku k v bodoch A a C sa pretínajú v bode P. Úsečka PB pretína kružnicu k v bode Q. Dokážte, že priesečník osi uhla AQC s priamkou AC je rovnaký nezávisle na výbere kružnice k.

15. Do triedy chodí konečný počet dievčat a chlapcov. *Živá* skupina chlapcov je taká, že každé dievča pozná aspoň jedného chlapca zo skupiny. Podobne, *živá* skupina dievčat je taká, že každý chlapec pozná aspoň jedno dievča zo skupiny. Dokážte, že počet živých skupín chlapcov má rovnakú paritu ako počet živých skupín dievčat. (Poznanie sa je vzájomné, ak Fero pozná Aničku, tak aj Anička pozná Fera).

16. Majme pevne dané prirodzené číslo n. Nájdite všetky n-tice celých čísel $(a_1, \ldots, a_n)$, ktoré splňujú obidve nasledovné podmienky:

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n^2$,
- $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leqq n^3 + 1$.

17. Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Ďalej nech M je stred AB a P je bod vnútri trojuholníka ABC taký, že $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle PBC|$. Dokážte, že

$$|\measuredangle APM| + |\measuredangle BPC| = 180^\circ.$$

18. Nech n je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ také, aby pre všetky celé čísla x a y platilo $f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$.