4. kvalifikačné kolo MO
Algebra

04. 03. 2025

Úloha 1. Nech $k \in (0, 1)$ a nech $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je nekonečná postupnosť reálnych čísel, ktorá spĺňa

$$a_{n+1} \leq \left(1 + \frac{k}{n}\right) a_n - 1$$

pre všetky $n = 1, 2, \ldots$. Dokážte, že existuje prirodzené číslo t, také že $a_t < 0$.

Úloha 2. Nech $\mathbb{R}^+$ značí množinu kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré spĺňajú

$$f(y + f(x)) = f(x) + yf(y) + 3x$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Úloha 3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)^2} + \frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)^2} + \frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)^2} \geq \frac{1}{9}.$$