MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6

1 Pán Vaflička vypráža a predáva šišky, pán Šiška pečie a predáva vafle. Obaja cukrári majú každý týždeň otvorené od pondelka do piatka. Lenka u nich kupuje každý pondelok 2 vafle a 1 šišku, každý utorok 3 šišky a 1 vafľu, každú stredu 4 šišky, každý štvrtok 3 vafle a každý piatok 2 šišky a 2 vafle. Pán Šiška si raz všimol, že od prvého pondelka tohto mesiaca predal Lenke dokopy 30 vaflí.

Koľko šišiek predal Lenke za rovnaké obdobie pán Vaflička?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Pán Šiška predal Lenke za každý týždeň od pondelka do piatka $2 + 1 + 0 + 3 + 2$ čiže 8 vaflí. Keďže ich kúpila spolu 30 a $3 \cdot 8 = 24 \leq 30 < 32 = 4 \cdot 8$, predával jej ich celé 3 pracovné týždne, takže za ten čas ich kúpila $3 \cdot 8$ čiže 24. Štvrtý týždeň ich teda kúpila $30 - 24$ čiže 6. Keďže $2 + 1 + 0 + 3 = 6$, ich nákup ukončila vo štvrtok. Lenkino nákupné obdobie teda trvalo 3 pracovné týždne a ďalšie 4 pracovné dni.

Za ten čas od pána Vafličku kúpila $(1+3+4+0+2)+(1+3+4+0+2)+(1+3+4+0+2)+(1+3+4+0)$ čiže 38 šišiek.

---

2 V obdĺžniku so stranami dĺžok 4 cm a 8 cm ležia dve rôzne polkružnice, z ktorých každá má krajné body v jeho dvoch susedných vrcholoch a dotýka sa protiľahlej strany.

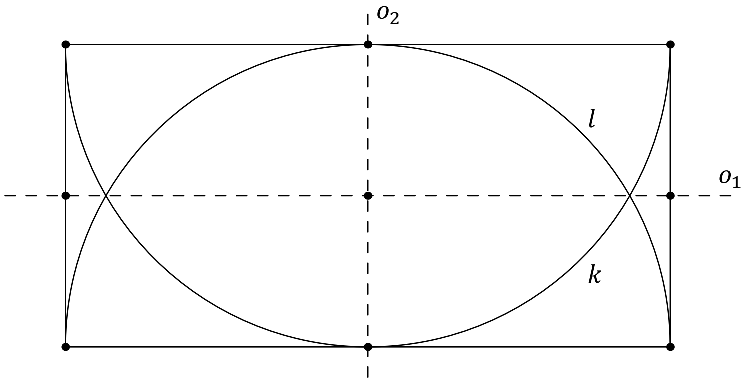
Zostrojte štvorec taký, že jeho dva vrcholy ležia na jednej polkružnici, zvyšné dva na druhej a jeho strany sú rovnobežné so stranami obdĺžnika.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Obdĺžnik má dve osi súmernosti, ktoré sú osami dvojíc jeho protiľahlých strán, sú teda rovnobežné s jeho stranami. Označme ich o_1 a o_2, pričom prvá je rovnobežná s jeho dlhšou stranou a druhá s kratšou.

Polkružnice, ktoré označme k a l, sú potom súmerne združené podľa osi o_1 a každá z nich je súmerná podľa osi o_2.



Hľadaný štvorec označme $ABCD$ tak, že jeho strany AB a CD sú rovnobežné s dlhšou stranou obdĺžnika a strany AD a BC s kratšou.

Keďže každá priamka rovnobežná s osou o_2 má s každou z polkružníc k a l najviac jeden spoločný bod, jeden z vrcholov A a D leží na jednej z nich a druhý na druhej. Tieto body sú navyše súmerné podľa osi o_1.

To isté platí aj pre dvojicu vrcholov B a C. Preto je štvorec $ABCD$ súmerný podľa osi o_1.

Bez ujmy na všeobecnosti nech vrchol A leží na polkružnici k a vrchol D na polkružnici l.

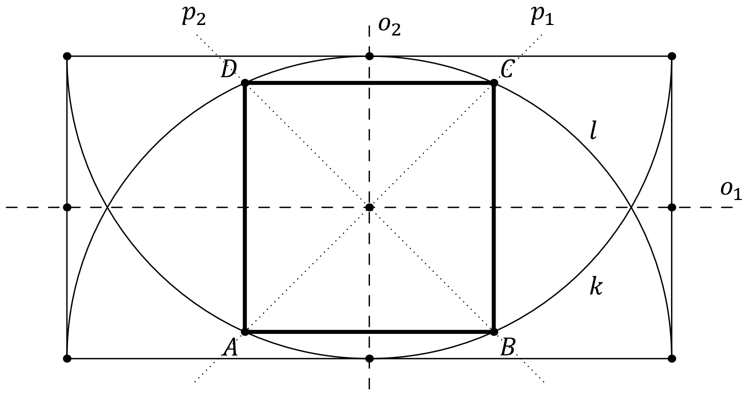
Rozoberme dva prípady:

- Nech vrchol B leží na polkružnici k a vrchol C na polkružnici l.

  Každá priamka rovnobežná s osou o_1 má s polkružnicou k najviac dva spoločné body, ktoré sú navyše súmerné podľa osi o_2, preto sú body A a B súmerné podľa osi o_2.

  To isté platí aj pre dvojicu bodov C a D a polkružnicu l, takže štvorec $ABCD$ je súmerný aj podľa osi o_2.

To znamená, že stred štvorca $ABCD$ je priesečníkom osí o_1 a o_2 a jeho uhlopriečky sú osami nimi zvieraných pravých uhlov.



Vrcholy štvorca je možné zostrojiť napr. takto:

1. o_1 a o_2 sú osi strán obdĺžnika,
3. p_1 a p_2 sú osi uhlov zvieraných priamkami o_1 a o_2,
4. A, B, C, D sú príslušné priesečníky priamok p_1 a p_2 s polkružnicami k a l.

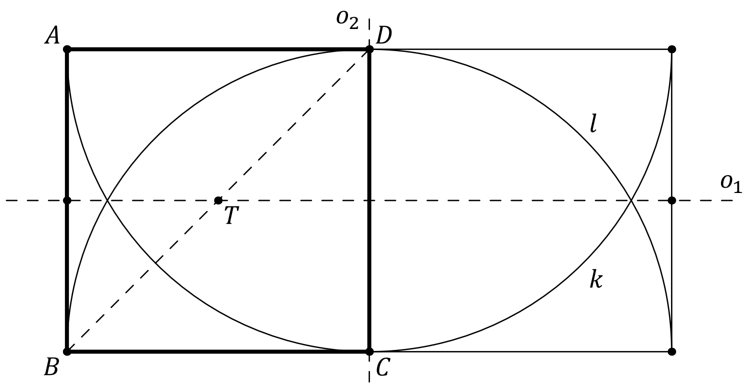
- Nech vrchol B leží na polkružnici l a vrchol C na polkružnici k.

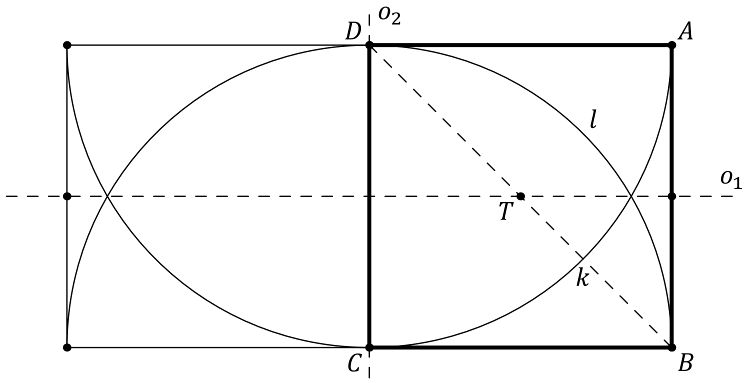
  Keďže štvorec $ABCD$ je súmerný podľa osi o_1, leží na nej aj jeho stred, ktorý označme T. Je to zároveň stred jeho uhlopriečky AC.

  Keďže uhly, ktoré zviera uhlopriečka AC so stranami $ABCD$, a teda aj so stranami obdĺžnika, sú zhodne polovice pravého uhla, oba vrcholy A a C ležia na jednej z dvoch štvrťkružníc polkružnice k, na ktoré ju delí os o_2, a os úsečky AC splýva s osou tejto štvrťkružnice.

  Bod T je teda priesečník tejto osi a priamky o_1, čo je práve stred štvorca, ktorý z obdĺžnika oddeľuje os o_2. Vrcholy A a C sú potom krajnými bodmi tejto štvrťkružnice.

  To isté platí aj pre dvojicu vrcholov B a D a polkružnicu l. Dostávame tak dve riešenia (až na označenie vrcholov) so zrejmou konštrukciou:





Úloha má teda 3 riešenia.

Komentár:

Vzhľadom na náročnosť uvedeného rozboru prípadov odporúčame hodnotiť plným počtom bodov aj také práce, ktoré nájdu len jedno z týchto troch riešení.

Riešiteľom, ktoré našli len jedno z (nečakaných) druhých dvoch riešení (alebo aj obe), však možno navhrnúť, aby nesúťažne vyriešili aj takto upravenú úlohu, ktorá sa týmto riešeniam vyhne:

> V obdĺžniku so stranami dĺžok 4 cm a 8 cm ležia dve rôzne polkružnice, z ktorých každá má krajné body v jeho dvoch susedných vrcholoch a dotýka sa protiľahlej strany.
>
> Zostrojte štvorec taký, že jeho dva *susedné* vrcholy ležia na jednej polkružnici, zvyšné dva na druhej a jeho strany sú rovnobežné so stranami obdĺžnika.

---

3 Päťciferný palindróm je také päťciferné číslo, ktoré má na mieste jednotiek rovnakú cifru ako na mieste desaťtisícok a na mieste desiatok rovnakú cifru ako na mieste tisícok.

Nájdite najmenší päťciferný palindróm deliteľný číslom 36.

(Iveta Jančigová)

Riešenie 1:

Keďže $36 = 4 \cdot 9$ a čísla 4 a 9 sú nesúdeliteľné, stačí kontrolovať deliteľnosť práve týmito číslami:

Deliteľnosť 4 znamená, že posledné dvojčíslie je deliteľné 4. Najmenšie dvojčíslie deliteľné 4 s najmenšou nenulovou číslicou na mieste jednotiek je 12. Ak je možné nahradiť $*$ v zápise $21 * 12$ tak, aby vzniknuté číslo bolo deliteľné 9, bude to hľadaný polynóm.

Deliteľnosť 9 znamená, že ciferný súčet je deliteľný 9. Súčet doteraz použitých cifier je $2 + 1 + 1 + 2$ čiže 6, najmenšie možné doplnenie predchádzajúceho tvaru je teda 21312.

Riešenie 2:

Každý deliteľ čísla 36 je tiež deliteľom hľadaného palindrómu. Hľadaný palindróm je teda párny. Prvé párne päťciferné palindrómy zoradené vzostupne sú tieto:

- 20002, čo nie je deliteľné 36,
- 20102, čo nie je deliteľné 36,
- 20202, čo nie je deliteľné 36,
- 20302, čo nie je deliteľné 36,
- 20402, čo nie je deliteľné 36,
- 20502, čo nie je deliteľné 36,
- 20602, čo nie je deliteľné 36,
- 20702, čo nie je deliteľné 36,
- 20802, čo nie je deliteľné 36,
- 20902, čo nie je deliteľné 36,
- 21012, čo nie je deliteľné 36,
- 21112, čo nie je deliteľné 36,
- 21212, čo nie je deliteľné 36,
- 21312 čo je deliteľné 36.

Najmenší päťciferný palindróm deliteľný 36 je teda 21312.

---

4 Šárka s Ľubošom spoločne zasadili 70 tulipánov rôznych farieb. Šárka nesadila žlté tulipány a päť devätín tulipánov, ktoré zasadila, boli červené. Ľuboš nesadil červené tulipány a dve sedemnástiny tulipánov, ktoré zasadil, boli žlté.

Koľko zasadených tulipánov malo inú farbu ako červenú alebo žltú?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Počet tulipánov, ktoré zasadila Šárka, bol násobkom 9, počet tých, ktoré zasadil Ľuboš, bol násobkom 17 a spoločne ich zasadili 70. Pre násobky 17 neprevyšujúce 70 vyjadríme ich rozdiel voči 70 a overíme jeho deliteľnosť 9:

Ľuboš	0	17	34	51	68
Šárka	70	53	36	19	2
deliteľné 9	nie	nie	áno	nie	nie

Ľuboš teda zasadil 34 tulipánov a Šárka 36.

Červené tulipány sadila Šárka a bolo ich $\frac{5}{9} \cdot 36$ čiže 20. Žlté tulipány sadil Ľuboš a bolo ich $\frac{2}{17} \cdot 34$ čiže 4. Inú farbu ako červenú či žltú malo teda $70 - 20 - 4$ čiže 46 tulipánov.

---

5 Tri kamarátky sa po rokoch zišli a rozprávali sa o tom, kde ktorá z nich býva:

Prvá: „Ja bývam v Hruštíne.“.

Druhá: „Ja nebývam v Očovej.“.

Tretia druhej: „Ty nebývaš v Jasenove.“.

Kamarátky naozaj bývajú v spomínaných dedinách, každá v inej. Jedna z kamarátok nepovedala pravdu a nebola to tá z Očovej.

Rozhodnite, kde ktorá z kamarátok býva.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Postupne preveríme tri prípady podľa toho, ktorá z kamarátok nehovorila pravdu.

- Nech klamala prvá (a druhá a tretia hovorili pravdu):

  Prvá nemôže bývať v Očovej, pretože tá z Očovej neklame, ani v Hruštíne, pretože potom by hovorila pravdu. Býva teda v Jasenove.

  Druhá nebýva v Očovej, pretože hovorila pravdu, ani v Jasenove, pretože tam býva prvá. Býva teda v Hruštíne.

  Na tretiu ostáva Očová.

  Tento prípad je v súlade so zadaním.
- Nech klamala druhá (a prvá a tretia hovorili pravdu):

  Druhá má bývať v Očovej, pretože jej výrok nie je pravdivý, a súčasne tam bývať nemôže, pretože tá z Očovej neklame.

  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech klamala tretia (a prvá a druhá hovorili pravdu):

  Prvá býva v Hruštíne, pretože hovorila pravdu.

  Druhá nebýva v Očovej, pretože hovorila pravdu, ani v Hruštíne, pretože tam býva prvá. Býva teda v Jasenove.

  Na tretiu ostáva Očová, čo je však v rozpore s tým, že tá z Očovej neklame.

  Tento prípad teda nenastáva.

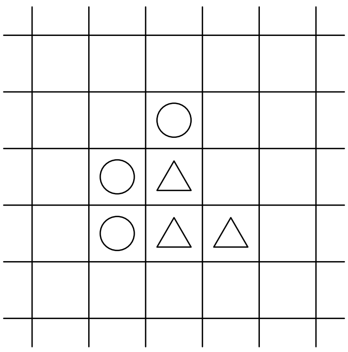
Iba prvý prípad neviedol k žiadnemu rozporu. Prvá kamarátka teda býva v Jasenove, druhá v Hruštíne a tretia v Očovej.

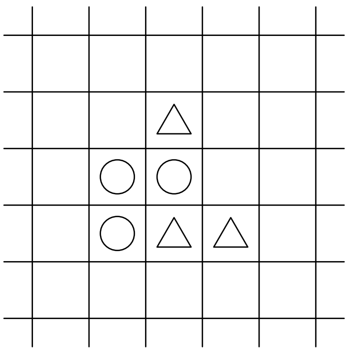
---

6 V štvorcovej sieti sú tri kruhy a tri trojuholníky, každý v inom políčku. Každý útvar má aspoň jedného suseda, pričom susedia sú políčka so spoločnou stranou. Obsadené políčka tvoria súvislú oblasť, t. j. od každého ku každému sa dá dostať cez susedov. Každú noc sa každý útvar môže zmeniť podľa toho, ako cez deň vyzerali jeho susedia:

- Ak je útvar kruh a medzi jeho susedmi bolo viac trojuholníkov ako kruhov, tak sa zmení na trojuholník.
- Ak je útvar trojuholník a medzi jeho susedmi bolo viac kruhov ako trojuholníkov, tak sa zmení na kruh.
- V ostatných prípadoch sa útvar nezmení.

Príklad štvorcovej siete a premeny jej útvarov po jednej noci je na obrázku:





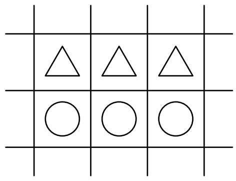
Nájdite aspoň jedno rozmiestnenie troch kruhov a troch trojuholníkov do siete také,

a) aby sa v noci nezmenili;
b) aby sa každý útvar každú noc zmenil;
c) aby po niekoľkých nociach boli všetky útvary rovnaké.

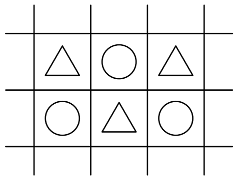
(Iveta Jančigová)

Riešenie:

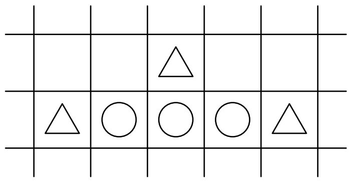
a) Žiaden útvar nemá viac iných susedov než rovnakých, takže sa nezmení.



b) Každý útvar má viac iných susedov než rovnakých, takže sa zmení.



c) Každý trojuholník má viac iných susedov než rovnakých, takže sa zmení, a žiaden kruh nemá viac iných susedov než rovnakých, takže sa nezmení. Už po prvej noci teda budú všetky útvary kruhy.



Poznámka:

Na podobných pravidlách je založená hra pre 0 hráčov *Life*, pozri napríklad https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024