MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7

1 Alenka a Zuzka jedli slivky. Prvý deň zjedla Alenka tri štvrtiny toho, čo v ten istý deň zjedla Zuzka. Druhý deň zjedla Zuzka tri polovice toho, čo v ten istý deň zjedla Alenka. Dokopy za oba dni zjedli 31 sliviek a každé dievča každý deň zjedlo celočíselný počet sliviek.

Koľko sliviek zjedla za oba dni Alenka?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Prvý deň Alenka zjedla tri sedminy toho, čo v ten istý deň zjedli spoločne, na druhý deň zjedla dve pätiny toho, čo v ten istý deň zjedli spoločne. Počet sliviek spoločne zjedených za prvý deň bol násobkom 7, za druhý deň násobkom 5. Celkovo za oba dni zjedli 31 sliviek. Pre násobky 7 neprevyšujúce 31 vyjadríme ich rozdiel od 31 a overíme ich deliteľnosť 5:

1. deň	0	7	14	21	28
2. deň	31	24	17	10	3
deliteľné 5	nie	nie	nie	áno	nie

Prvý deň teda spoločne zjedli 21 sliviek a druhý deň 10.

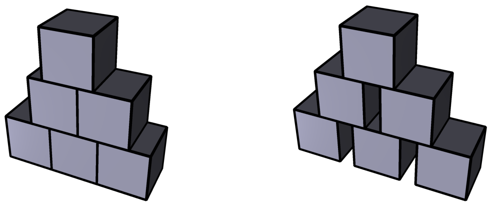
Prvý deň Alenka zjedla $\frac{3}{7} \cdot 21$ čiže 9 sliviek a druhý deň zjedla $\frac{2}{5} \cdot 10$ čiže 4 slivky, za oba dni teda spolu $9 + 4$ čiže 13 sliviek.

Prehľadný záznam konzumácie sliviek vyzerá takto:

	Alenka	Zuzka	spolu
1. deň	9	12	21
2. deň	4	6	10
spolu	13	18	31

2 Mikuláš postavil pyramídu zo 6 rovnakých kociek s hranami dĺžky 7 cm. Spodné poschodie tvorili 3 kocky, prostredné poschodie 2 kocky a horné poschodie 1 kocka. Susedné kocky v každom poschodí mali spoločnú stenu, poschodia navzájom nepréčnievali. Víťazoslav posunul kocky tak, že každá kocka v horných dvoch poschodiach stála na dvoch spodných kockách a medzi susednými kockami v spodných dvoch poschodiach boli medzery široké tretinu hrany kocky. Až na tieto medzery poschodia navzájom nepréčnievali.

O koľko cm^2 sa líšia povrchy pôvodnej a upravenej pyramídy?

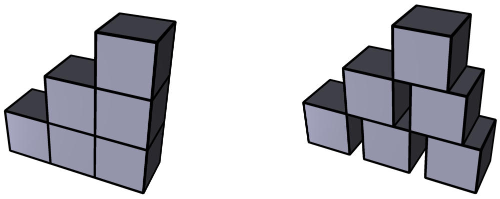


(Vladimír Dedek)

Riešenie:

Susedné kocky na spodnom a prostrednom poschodí pôvodnej pyramídy mali 3 spoločné zvislé steny, teda posunutím kociek vzniklo 6 zvislých stien navyše.

K zmene povrchu prispievajú aj rozdiely na úrovni vodorovných rozhraní medzi poschodiami. Tie nezávisia na miere posunutia poschodí voči sebe. Na vyjadrenie prírastku povrchu je výhodné poschodia vhodne posunúť (pri zachovaní všetkých podmienok zo zadania). Pyramídy môžu vyzerať napr. takto:



V novej pyramíde pribudli 2/3 steny medzi horným a prostredným poschodím (1/3 na spodnej stene hornej kocky a 1/3 na hornej stene pravej prostrednej kocky) a 4/3 steny medzi prostredným a spodným poschodím (2/3 na spodných stenách prostredných kociek a 2/3 na horných stenách dvoch spodných kociek).

Dokopy je v povrchu novej pyramídy o $6 + 2/3 + 4/3$ čiže 8 stien viac ako v pôvodnej pyramíde. Jedna stena má obsah $7\ \text{cm} \cdot 7\ \text{cm}$ čiže $49\ \text{cm}^2$, povrchy pôvodnej a novej pyramídy sa teda líšia o $8 \cdot 49\ \text{cm}^2$ čiže $392\ \text{cm}^2$.

---

3 Pankrác, Servác a Bonifác sa ubytovali v hoteli. Čísla izieb boli trojciferné a cifra na mieste stoviek určovala poschodie, na ktorom sa izba nachádzala. Na raňajkách si podľa príveskov na kľúčoch od izieb všimli, že:

- v číslach ich izieb sú použité všetky cifry od 1 do 9,
- Pankrácovo číslo je deliteľné 9, Servácovo číslo je deliteľné 8, Bonifácovo číslo je deliteľné 7,
- Bonifácovo číslo je 4-krát väčšie ako Pankrácovo číslo,
- Servác býva na poschodí medzi Pankrácom a Bonifácom.

Určte čísla izieb Pankráca, Serváca a Bonifáca.

(Libuše Hozová, Erika Novotná)

Riešenie:

Bonifácovo číslo je 4-násobkom Pankrácovho čísla a Pankrácovo číslo je deliteľné 9, teda Bonifácovo číslo je násobkom 36, lebo čísla 4 a 9 sú nesúdeliteľné a $4 \cdot 9 = 36$. Súčasne je Bonifácovo číslo deliteľné 7, teda je deliteľné 252, lebo čísla 36 a 7 sú nesúdeliteľné a $36 \cdot 7 = 252$.

Trojciferné násobky čísla 252 sú 252, 504 a 756, a to sú možné Bonifácove čísla. V prvom z týchto čísel sa opakuje cifra 2, druhé obsahuje cifru 0, ani jedno teda nevyhovuje zadaniu. Bonifácovo číslo je teda 756, takže Pankrácovo je $756 : 4$ čiže 189.

Doteraz boli použité cifry 1, 5, 6, 7, 8, 9, ostávajú teda 2, 3, 4. Servácove číslo je preto jedno z čísel 234, 324, 342, 432, 423, 243, deliteľné 8 je však iba 432.

To spolu Pankrácovým a Bonifácovým číslom vyhovuje všetkým podmienkam zo zadania.

Pankrác mal izbu číslo 189, Servác 432 a Bonifác 756.

Poznámka:

Informáciu, že Servác býva na poschodí medzi Pankrácom a Bonifácom, sme pri riešení nepotrebovali. Je však nutné ju na konci overiť.

---

4 V jednej z piatich nádob očíslovaných 1, 2, 3, 4, 5 je minca. Sprievodné nápisy oznamujú:

- „Minca je v nádobe s nepárnym číslom.",
- „Minca je v nádobe s číslom väčším ako 3.",
- „Minca je v nádobe s číslom menším ako 4.".

Čestný strážca s bezchybným úsudkom dodáva: „Jeden z nápisov nie je pravdivý, zvyšné dva pravdivé sú. Hoci viem, ktorý nápis pravdivý nie je, neviem určiť, v ktorej nádobe je minca.".

Rozhodnite, ktorý z nápisov nie je pravdivý.

(Karel Pazourek)

Riešenie 1:

Keďže druhý a tretí nápis si odporujú, nemôžu byť oba pravdivé. Nepravdivý je teda jeden z nich, takže prvý je pravdivý. Minca je teda v nádobe s číslom 1, 3 alebo 5.

Ak by bol pravdivý druhý nápis, minca by musela byť v nádobe s číslom 5, strážca by teda vedel, kde minca je. To sa však nestalo, preto je druhý nápis nepravdivý.

Prvý a tretí nápis sú teda pravdivé a druhý nepravdivý, takže minca môže byť v ľubovoľnej z nádob s číslami 3 a 5.

Riešenie 2:

Postupne preveríme tri prípady podľa toho, ktorý nápis nebol pravdivý.

- Nech pravdivý nebol prvý nápis (a zvyšné dva boli pravdivé).

  Potom by minca mala byť v nádobe s párnym číslom väčším ako 3 a súčasne menším ako 4, čo nie je možné.

  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech pravdivý nebol druhý nápis (a zvyšné dva boli pravdivé).

  Potom je minca v nádobe s nepárnym číslom menším ako 4, môže byť teda buď v nádobe 1, alebo v nádobe 3.
- Nech pravdivý nebol tretí nápis (a zvyšné dva boli pravdivé).

  Potom je minca v nádobe s nepárnym číslom väčším ako 3 a nie menším ako 4, je teda v nádobe 5.

  Poloha mince je tak určená jednoznačne, čo však odporuje zadaniu.

  Tento prípad teda nenastáva.

Nepravdivý nápis je ten druhý.

---

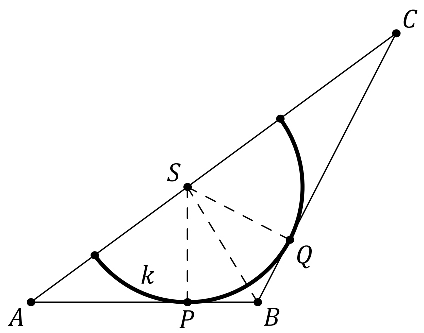
5 Nech ABC je trojuholník taký, že $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm a $|AC| = 12$ cm.
Zostrojte polkružnicu takú, že sa dotýka strán AB a BC a jej krajné body ležia na strane AC.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Aby sa polkružnica dotýkala strán AB a BC, musí mať stred na osi uhla ABC. Aby krajné body polkružnice ležali na strane AC, musí mať stred na tejto strane.

Stred hľadanej polkružnice je teda priesečníkom osi uhla ABC a strany AC a jej polomer je určený pätou P, resp. Q kolmice zo stredu S na priamku AB, resp. BC. (Tieto úsečky sú zhodné práve preto, že stred leží na osi uhla ABC, keďže trojuholníky BSP a BSQ.)



Z toho už vyplýva konštrukcia:

1. Nech S je priesečník úsečky AC a osi uhla ABC.
2. Nech P a Q sú päty kolmíc z bodu S na priamky AB, resp. BC.
3. Nech k je polkružnica so stredom S a polomerom $|SP|$, ktorej krajné body ležia na priamke AC.

Keďže uhol ABC je pri údajoch zo zadania tupý, uhly CAB a BCA sú ostré, takže body P a Q ležia na úsečkách AB, resp. BC.

Keďže S leží na osi uhla ABC, body P a Q sú podľa nej súmerné, takže polkružnica k prechádza aj bodom Q.

Keďže SP je odvesna a SA prepona pravouhlého trojuholníka APS, platí $|SP| < |SA|$, takže príslušný krajný bod polkružnice k leží na úsečke SA. Analogicky druhý leží na úsečke SC, takže oba ležia na strane AC.

Úloha má teda jediné riešenie.

---

6 Katka a Števo pečú každý na svojej panvici bez prestávok jednu palacinku za druhou a hotové palacinky dávajú na spoločný tanier. Obaja začali piecť súčasne. Katke trvá každá palacinka 3 minúty, Števovi trvá každá palacinka 4 minúty. Každých 5 minút od začiatku pečenia sa objaví maškrtný kocúr Lucifer. Ak sa Katka i Števo venujú pečeniu, tak im Lucifer jednu hotovú palacinku ukradne. Ak niekto z nich práve dáva palacinku z panvice na tanier, tak sa schová a palacinku neukradne.

Koľko palaciniek musia Katka so Števom upiecť, aby im ich ostalo 150? Ako dlho im to bude trvať?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Za 1 hodinu čiže 60 minút upečie Katka $\frac{60}{3}$ čiže 20 palaciniek a Števo $\frac{60}{4}$ čiže 15 palaciniek, čo je spolu $20 + 15$ čiže 35.

Lucifer sa objaví $\frac{60}{5}$ čiže 12 ráz. Keď sa objaví po 15, 30, 45 a 60 minútach, práve dopeká Katka, a keď sa objaví po 20 a 40 minútach, práve dopeká Števo. Pri týchto 6 objaveniach teda palacinku neukradne, pri zvyšných $12 - 6$ čiže 6 áno.

Za 4 hodiny Katka a Števo upečú $4 \cdot 35$ čiže 140 palaciniek čo je menej než požadovaných 150, tento čas teda určite nestačí. Navyše z nich Lucifer ukradne $4 \cdot 6$ čiže 24. Celkovo teda za 4 hodiny pribudne $140 - 24$ čiže 116 palaciniek.

Do 150 chýba $150 - 126$ čiže 34. Za 59 minút 5. hodiny upečie Katka $20 - 1$ čiže 19 palaciniek a Števo $15 - 1$ čiže 14, čo je spolu iba 33.

Určite teda bude treba aspoň 5 hodín. Za tento čas upečú Katka a Števo $5 \cdot 35$ čiže 175 palaciniek a z nich Lucifer ukradne $5 \cdot 6$ čiže 30. Celkovo teda za 5 hodiny pribudne $175 - 30$ čiže 145 palaciniek.

Ostáva posledných 5 palaciniek. Za prvých 8 minút 6. hodiny Katka upečie 2, a to v 3., 6. minúte, a Števo tiež 2, a to v 4. a 8. minúte, čo nestačí. Navyše v 5. minúte Lucifer 1 ukradne, takže v 8. minúte ich je $145 + 2 + 2 - 1$ čiže 148. Treba teda ešte 2.

V 9. minúte pribudne 1 Katkina a v 10. Lucifer 1 ukradne, takže v 10. minúte je ich $148 + 1 - 1$ čiže 148.

V 11. minúte nepribudne žiadna, stále ich teda nie je 150.

V 12. minúte pribude 1 Katkina a 1 Števova, ktoré Lucifer neukradne, je ich teda prvýkrat 150.

Pečenie palaciniek teda bude trvať 5 hodín a 12 minút. Za tie Katka upečie $5 \cdot 20 + 4$ čiže 104 a Števo $5 \cdot 15 + 3$ čiže 78, spolu ich teda upečú $104 + 78$ čiže 182.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024