MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8

1 Ivan, Jaro, Karol a Ľuboš majú dokopy 90 známok. Keby mal Ivan o dve známky menej, Jaro o dve viac, Karol dvojnásobok a Ľuboš polovicu toho, čo teraz, mali by všetci rovnako.

Koľko známok má každý z chlapcov?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Počty známok Ivana, Jara, Karola a Ľuboša označme postupne i, j, k, l. Podľa zadania platí

$$i + j + k + l = 90$$

a

$$i - 2 = j + 2 = k \cdot 2 = l : 2.$$

Túto spoločnú hodnotu označme x. Potom platí

$$i = x + 2,$$
$$j = x - 2,$$
$$k = x : 2,$$
$$l = x \cdot 2,$$

takže po dosadení do prvého vzťahu

$$(x + 2) + (x - 2) + (x : 2) + (x \cdot 2) = 90,$$

takže

$$2x + 0{,}5x + 2x = 90,$$
$$4{,}5x = 90,$$
$$x = \frac{90}{4{,}5},$$
$$x = 20.$$

Z toho

$$i = 20 + 2 = 22,$$
$$j = 20 - 2 = 18,$$
$$k = 20 : 2 = 10,$$
$$l = 20 \cdot 2 = 40.$$

Ivan mal teda 22 známok, Jaro 18, Karol 40 a Ľuboš 10.

Spolu ich teda mali $22 + 18 + 40 + 10$ čiže 90. Keby mal Ivan o dve známky menej, mal by ich $22 - 2$ čiže 20, keby mal Jaro o dve viac, mal by ich $18 + 2$ čiže 20, keby mal Karol dvojnásobok, mal by ich $10 \cdot 2$ čiže 20, a keby mal Ľuboš polovicu, mal by ich $40 : 2$ čiže 20, všetci by teda mali rovnako.

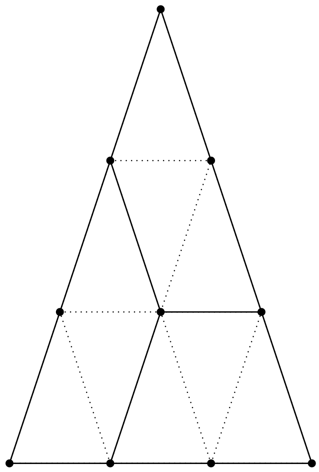
---

2 Nájdite aspoň jedno rozdelenie rovnoramenného trojuholníka so základňou dĺžky 12 cm a výškou na základňu dĺžky 18 cm na tri lichobežníky s rovnakým obsahom.

(Lenka Dedková)

Riešenie:

Trojuholník rozdelíme na 9 s ním podobných zhodných trojuholníkov s koeficientom podobnosti $\frac{1}{3}$ a združíme ich po 3 do 3 štvoruholníkov, čo sú vzhľadom na zrejmú rovnobežnosť vždy jednej z dvojíc protiľahlých strán lichobežníky.



Poznámka:

Zadané rozmery trojuholníka sú irelevantné, takéto delenie možno zrejme urobiť v ľubovoľnom trojuholníku.

Dá sa dokonca dokázať, že takéto delenie a delenie s ním (aspoň v tomto prípade) symetrické sú jediné dve riešenia tejto úlohy.

---

3 Čísla a, b, c, d sú také, že platí:

- Číslo a dáva po delení 3 zvyšok 1.
- Číslo b dáva po delení 6 zvyšok 2.
- Platí $a - b = d - c$.
- Číslo d je deliteľné 3.

Aký zvyšok po delení 9 môže dávať číslo c? Nájdite všetky možnosti.

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Keďže a dáva po delení 3 zvyšok 1, existuje celé číslo x také, že $a = 3x + 1$. Keďže b dáva po delení 6 zvyšok 2, existuje celé číslo y také, že $b = 6y + 2$. Keďže d je deliteľné 3, existuje celé číslo z také, že $d = 3z$.

Platí $a - b = d - c$, takže

$$c = d - a + b = 3z - (3x + 1) + (6z + 2) = 3z - 3x + 6z + 1 = 3(z - x + 2z) + 1.$$

Číslo c teda dáva po delení 3 zvyšok 1, takže po delení 9 dáva jeden zo zvyškov 1, 4, 7.

Ukážeme, že všetky tri prípady sú možné: Nech $a = 4$, $b = 2$ a $(c, d) \in \{(1, 3), (4, 6), (7, 9)\}$. Potom číslo a dáva po delení 3 zvyšok 1, číslo b dáva po delení 6 zvyšok 2, číslo d je deliteľné 3 a platí $a - b = 2 = d - c$.

---

4 Nech $ABCDE$ je pravidelný päťuholník. Rovnobežka s priamkou AB prechádzajúca bodom C pretína priamku BD v bode F. Kolmica na priamku CF prechádzajúca bodom C pretína priamku BD v bode G.

Určte veľkosť uhla AGF.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

V nasledujúcich úvahách budeme používať niekoľko vlastností pravidelného päťuholníka:

- Všetky strany sú navzájom zhodné a rovnako tak všetky uhlopriečky, teda akýkoľvek trojuholník, ktorého vrcholy sú jeho vrcholmi, je rovnoramenný.
- Je osovo súmerný podľa piatich rôznych osí. Pri každej z týchto súmerností sa vždy jedna strana a nepriliehajúca uhlopriečka zobrazujú samé na seba, teda sú navzájom rovnobežné.
- Má všetky uhly zhodné, teda veľkosť jeho uhla je $540° : 5$ čiže $108°$. (Každý päťuholník totiž možno dvoma uhlopriečkami rozdeliť na 3 trojuholníky, teda súčet veľkostí jeho uhlov je $3 \cdot 180°$ čiže $540°$.)

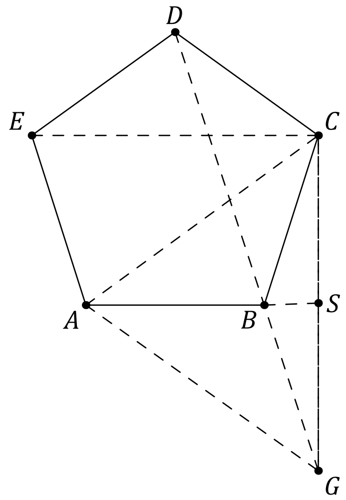
V našej úlohe ukážeme, že trojuholník ABG je zhodný s trojuholníkom ABC, teda hľadaný uhol nájdeme medzi uhlami vymedzenými stranami a uhlopriečkami päťuholníka.

Trojuholník ABD je rovnoramenný, teda uhly BAD a ABD pri jeho základni sú zhodné. Priamky AD a BC sú rovnobežné, takže uhly DAB a CBS, kde S je priesečník AB a CG, sú súhlasné, a teda zhodné. Uhly ABD a GBS sú vrcholové, teda sú tiež zhodné. To znamená, že uhly CBS a GBS sú zhodné.

Priamka CG je kolmá na priamku CF a tá je rovnobežná s priamkou AB, priamky CG a AB sú teda kolmé. To spolu s predchádzajúcim poznatkom, že uhly CBS a GBS sú zhodné, znamená, že body C a G sú osovo súmerné podľa priamky AB. Preto aj trojuholníky ABC a ABG sú osovo súmerné a hľadaný uhol AGB je zhodný s uhlom ACB.

Trojuholník ABC je rovnoramenný, teda uhly BAC a BCA sú zhodné. Uhol ABC je vnútorným uhlom päťuholníka, teda jeho veľkosť je 108°. Keďže súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°, veľkosť uhla ACB je $\frac{1}{2}(180° - 108°)$ čiže 36°.

Preto aj veľkosť uhla AGF je 36°.



Riešenie 2:

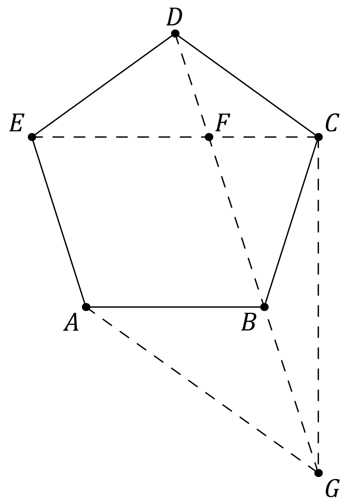
Z vlastností pravidelného 5-uholníka dostávame, že AE a BD čiže BF sú rovnobežné a analogicky AB a EC čiže EF sú rovnobežné. Preto je $ABFE$ rovnobežník, takže úsečky BF a AE, a teda aj BF a BC zhodné. Trojuholník BFC je teda rovnoramenný so základňou CF.

Keďže uhol FCG je pravý, podľa Tálesovej vety bod C leží na kružnici s priemerom FG. Keďže úsečky BF a BC zhodné, bod B je stred tejto kružnice, takže úsečky BG a BF sú zhodné. Potom je BG zhodné aj s úsečkou BC, a teda aj s úsečkou BA. Preto je trojuholník BAG rovnoramenný so základňou AG.

Súčet veľkostí uhlov pravidelného 5-uholníka je $(5-2) \cdot 180°$ čiže 540°, takže každý z nich má veľkosť $\frac{540°}{5}$ čiže 108°. Keďže EA a BD sú rovnobežné, uhly EAB a GBA sú striedavé, takže platí

$$|\sphericalangle AGF| = |\sphericalangle AGB| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |\sphericalangle AGB| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle AGB| + |\sphericalangle GAB|)$$

$$= \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle ABG|) = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle EAB|) = \frac{1}{2}(180° - 108°) = \frac{1}{2} \cdot 72° = 36°.$$



---

5 Určte všetky možné dvojice čísel (a, b) také, že podiel najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b je 75 a súčet čísel a a b je väčší ako 100 a menší ako 200.

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Pretože poradie čísel nie je dôležité, budeme v ďalšom pre zjednodušenie predpokladať, že $a < b$. Najväčší spoločný deliteľ čísel a a b označíme d. Potom existujú nesúdeliteľné čísla u a v také, že $a = ud$ a $b = vd$. Zrejme $u < v$. Najmenší spoločný násobok čísel a a b je potom uvd. Podiel najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b je 75, platí teda $uv = 75$. Pretože $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$ a čísla u a v sú nesúdeliteľné, platí buď $u = 1$ a $v = 75$, alebo $u = 3$ a $v = 25$. Rozoberme prípady:

- Nech $u = 1$ a $v = 75$.

d	a	b	$100 < a + b < 200$
1	1	75	76
2	2	150	152
3	3	225	228

  Podmienku $100 < a + b < 200$ teda spĺňa iba dvojica $(2, 150)$. S rastúcim d sa zväčšuje aj súčet $a + b$, teda nie je potrebné ďalšie skúšanie.

  Vyhovujú te

- Nech $u = 3$ a $v = 25$.

d	a	b	$a + b$
1	1	25	26
2	2	50	52
3	3	75	78
4	4	100	103
5	5	125	128
6	6	150	153
7	7	175	178
8	8	200	203

  Podmienku $100 < a + b < 200$ teda spĺňajú iba dvojice $(4, 100)$, $(5, 125)$, $(6, 150)$, $(7, 175)$. S rastúcim d sa zväčšuje aj súčet $a + b$, teda nie je potrebné ďalšie skúšanie.

Zhrnutím dostávame, že všetkých vyhovujúcich dvojíc je 10, a to $(2, 150)$, $(12, 100)$, $(15, 125)$, $(18, 150)$, (21, 175) $(100, 12)$, $(125, 15)$, $(150, 18)$, $(150, 2)$, $(175, 21)$.

---

6 Rybár Šťuka chytil niekoľko rýb. Keď predal tri najťažšie ryby majiteľovi miestnej reštaurácie, znížil celkovú hmotnosť svojho úlovku o 35 %. Keď dal tri najľahšie ryby svojmu psovi, znížil hmotnosť zostávajúcich ulovených rýb o päť trinástin.

Koľko rýb chytil pán Šťuka?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Tri najťažšie ryby zodpovedajú 35 % hmotnosti celého úlovku, zvyšné ryby teda zodpovedajú 100 % − 35 % čiže 65 %. Päť trinástin tohto zvyšku tvorí štvrtinu, lebo $\frac{5}{13} \cdot \frac{65}{100} = \frac{1}{4}$, teda tri najľahšie ryby zodpovedajú 25 % hmotnosti celého úlovku. Zvyšný neznámy počet rýb tak zodpovedá 100 % − 35 % − 25 % čiže 40 % hmotnosti celého úlovku.

Pretože zvyšné ryby vážia viac ako 3 najťažšie, boli aspoň 4. Pretože zvyšné ryby vážia menej ako 2-násobok váhy 3 najľahších, bolo ich najviac 5.

Priemerná hmotnosť 3 najťažších rýb je 35 % : 3 čiže $11{,}\overline{6}$ % hmotnosti celého úlovku a priemerná hmotnosť 3 najľahších rýb je 25 % : 3 čiže $8{,}\overline{3}$ % hmotnosti celého úlovku.

Keby zvyšných rýb bolo 5, ich priemerná hmotnosť by bola 40 % : 5 čiže 8 % hmotnosti celého úlovku, čo je menej ako priemerná váha 3 najľahších rýb, a to nie je možné.

Zvyšné ryby teda boli 4, takže pán Šťuka chytil $3 + 4 + 3$ čiže 10 rýb.

Treba však ešte ukázať, že takáto situácia môže nastať, a to napríklad takto: Nech najťažšie 3 ryby majú rovnakú hmotnosť $\frac{3{,}5}{3}$ kg, takže spolu vážia 3,5 kg, najľahšie 3 ryby majú rovnakú hmotnosť $\frac{2{,}5}{3}$ kg, takže spolu vážia 2,5 kg, a zvyšné 4 ryby majú rovnakú hmotnosť 1 kg, takže spolu vážia 4 kg, Celková hmotnosť všetkých 10 rýb je potom 3,5 kg + 4 kg + 2,5 kg čiže 10 kg. Najťažšie 3 ryby teda tvoria 35 % hmotnosti. Zvyšok má 4 kg + 2,5 kg čiže 6,5 kg, takže 3 najľahšie ryby tvoria $\frac{5}{13}$ tejto hmotnosti.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024