# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

## Zadania úloh 1. časti celoštátneho kola kategórie A

**1** Pre reálne čísla $a$, $b$, $c$, $d$ platí

$$a + b + c + d = 0$$

a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Koľko z rovností

$$ab = cd,$$

$$ac = bd,$$

$$ad = bc$$

môže súčasne platiť?

**2** Nájdite najväčšie celé číslo $n$ s nasledujúcou vlastnosťou: Kedykoľvek je v rovine daných päť navzájom rôznych bodov tak, že niektoré dva z nich ležia vo vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými tromi bodmi, je možné niektoré tri z týchto piatich bodov označiť $X$, $Y$, $Z$ tak, že platí $n^\circ < |\sphericalangle XYZ| \leq 180^\circ$.

**3** Nech $p$ je najväčšie prvočíslo deliace prirodzené číslo $n$, kde $n > 1$. Pre každú neprázdnu podmnožinu deliteľov čísla $n$ napíšeme súčet jej prvkov. Predpokladajme, že sme takto napísali viac ako $p$ čísel z množiny $\{1, 2, \dots, p+2\}$ a žiadne číslo z tejto množiny sme nenapísali viackrát. Dokážte, že žiadne číslo sme nenapísali viackrát.

---

1. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **pondelok 17. marca 2025** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.
Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

---


- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzenti: Peter Novotný, Stanislav Krajči
- preklad: Peter Novotný

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

## Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

**4** Pozdĺž kružnice sú napísané aspoň 3 navzájom rôzne prvočísla. Pre každé dve susedné prvočísla určíme najväčšie prvočíslo deliace ich súčet. Takto získame až na poradie opäť rovnaké prvočísla, ako boli tie napísané. Nájdite všetky možné počiatočné množiny prvočísel.

(Napríklad prvočísla 2, 7, 3, 11, 17 v tomto poradí nevyhovujú, pretože zodpovedajúce súčty 9, 10, 14, 28, 19 majú najväčšie prvočíselné delitele postupne 3, 5, 7, 7, 19.)

**5** Nájdite všetky kladné prirodzené čísla $n$ s nasledujúcou vlastnosťou: Vo štvorcovej tabuľke $n \times n$ sa dá vyfarbiť $2n$ políčok tak, že žiadne dve z nich nesusedia stranou ani vrcholom a v každom riadku aj každom stĺpci sú vyfarbené práve 2 políčka.

**6** Nech $ABC$ je ostrouhlý trojuholník. Označme $H$ priesečník jeho výšok, $\omega$ kružnicu jemu opísanú a $O$ jej stred. Ďalej označme $M$ stred strany $BC$ a $D$ priesečník priamky $AH$ s kružnicou $\omega$ rôzny od $A$. Priamka $DM$ pretína kružnicu $\omega$ v bode $E$ rôznom od $D$. Nech $F$ je priesečník priamky $AE$ s kružnicou opísanou trojuholníku $OME$ rôzny od $E$. Dokážte, že platí $|FH| = |FA|$.

2. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **utorok 18. marca 2025** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.
Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.


- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autor za SK MO: Michal Pecho
- recenzenti: Peter Novotný, Stanislav Krajči
- preklad: Peter Novotný