MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh 1. dňa celoštátneho kola kategórie A

1 Pre reálne čísla a, b, c, d platí

$$a + b + c + d = 0$$

a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Koľko z rovností

$$ab = cd,$$

$$ac = bd,$$

$$ad = bc$$

môže súčasne platiť?

(Michal Janík)

Riešenie:

Práve 3 z týchto rovností platia napríklad v prípade $(a, b, c, d) = (1, -1, 1, -1)$.

Práve 2 z týchto rovností platia napríklad v prípade $(a, b, c, d) = (1, -1, 2, -2)$.

Dokážeme, že menej rovností ako 2 platiť nemôže. Rozoberme prípady:

- Nech sú niektoré dve z čísel a, b, c, d opačné.
  Vzhľadom na symetriu bez ujmy na všeobecnosti nech $a = -b$. Potom

  $$(-b) + b + c + d = 0,$$

  $$c = -d,$$

  takže platí

  $$ac = (-b)(-d) = bd$$

  a

  $$ad = (-b)d = b(-d) = bc,$$

  a teda platia aspoň 2 z rovností.
- Nech nie sú žiadne dve z čísel a, b, c, d opačné.
  Potom $a + b \neq 0$ a

  $$\frac{a+b}{ab} = \frac{b+a}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = -\frac{d+c}{cd} = -\frac{c+d}{cd} = \frac{-(c+d)}{cd} = \frac{a+b}{cd},$$

  takže

  $$\frac{1}{ab} = \frac{1}{cd},$$

  $$ab = cd.$$

  Analogicky platia obe zvyšné rovnosti, takže platia všetky 3.

Môžu teda platiť 2 alebo 3 rovnosti.

Poznámka:

Ukážeme ďalšie dva spôsoby, ako dokázať, že niektoré dve z čísel a, b, c, d sú k sebe opačné, a teda že nastane prvý z rozoberaných prípadov:

- Z prvého vzťahu

  $$d = -(a + b + c),$$

  takže z druhého

  $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0,$$

$$bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)-abc=0,$$
$$bc(a+b)+bc^2+ca(a+b)+c^2a+ab(a+b)+abc-abc=0,$$
$$bc(a+b)+ca(a+b)+ab(a+b)+\left(c^2a+bc^2\right)=0,$$
$$bc(a+b)+ca(a+b)+ab(a+b)+c^2(a+b)=0,$$
$$(a+b)\left(bc+ca+ab+c^2\right)=0,$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)=0,$$

takže niektoré dve z čísel a, b, c sú k sebe opačné.

- Z druhého vzťahu vynásobením nenulovým číslom $abcd$ dostávame

$$abc+bcd+cda+dab=0.$$

Nech f je funkcia definovaná vzťahom

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

všetky jej korene sú teda a, b, c, d. Roznásobením zátvoriek na pravej strane (resp. použitím Viètových vzťahov) dostaneme

$$f(x)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+bcd+cda+dab)x+abcd$$
$$=x^4-0x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-0x+abcd=x^4+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+abcd,$$

takže f je párna funkcia. Keďže má koreň a, musí mať aj koreň $-a$, a pretože $a\neq 0$, platí $-a\in\{b,c,d\}$, takže niektoré dve z čísel a, b, c, d sú k sebe opačné.

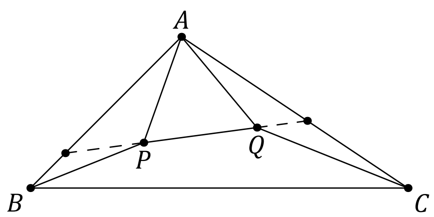
---

2 Nájdite najväčšie celé číslo n s nasledujúcou vlastnosťou: Kedykoľvek je v rovine daných päť navzájom rôznych bodov tak, že niektoré dva z nich ležia vo vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými tromi bodmi, je možné niektoré tri z týchto piatich bodov označiť X, Y, Z tak, že platí $n^\circ < |\sphericalangle XYZ| \le 180^\circ$.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Označme daných päť bodov A, B, C a P, Q tak, že P a Q ležia vo vnútri trojuholníka ABC, priamka PQ pretína strany AB a AC a neprechádza bodom A a bod P leží vnútri uhla BAQ:

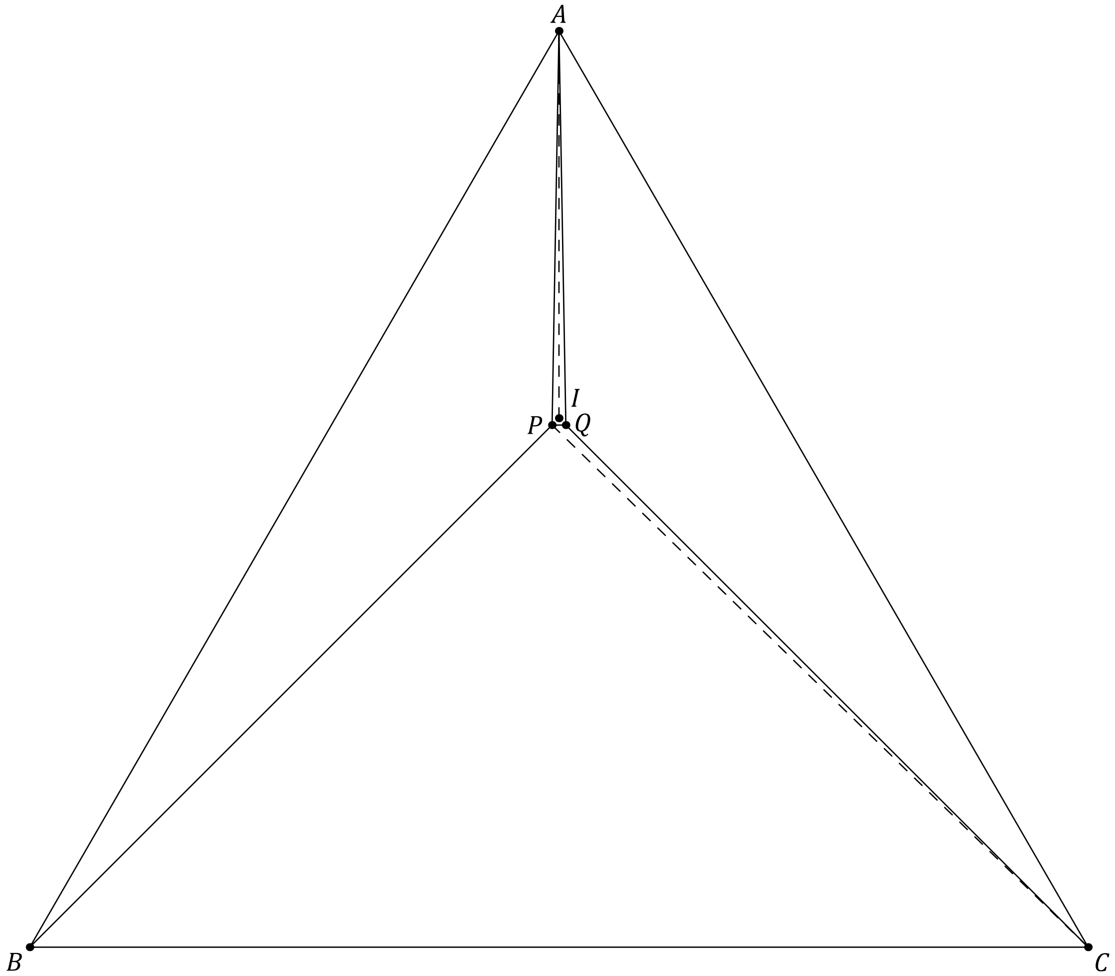


Potom možno trojuholník ABC rozdeliť na konvexný štvoruholník $BPQC$ a trojuholníky ABP, APQ, AQC. Preto platí

$$|\sphericalangle BPA|+|\sphericalangle BPQ|+|\sphericalangle CQA|+|\sphericalangle CQP|=(|\sphericalangle BPA|+|\sphericalangle BPQ|)+(|\sphericalangle CQA|+|\sphericalangle CQP|)$$
$$=(360^\circ-|\sphericalangle APQ|)+(360^\circ-|\sphericalangle AQP|)=720^\circ-(|\sphericalangle APQ|+|\sphericalangle AQP|)$$
$$=720^\circ-(180^\circ-|\sphericalangle PAQ|)=540^\circ+|\sphericalangle PAQ|>540^\circ=4\cdot 135^\circ,$$

takže jeden z uhlov BPA, BPQ, CQA, CQP je väčší než 135°.

Nájdeme päť bodov takých, že každý nimi určený konvexný uhol má veľkosť najviac 136°: Nech ABC je rovnostranný trojuholník a I jeho vnútorný bod taký, že BIC je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou BC. Na úsečkách BI a CI zvoľme body P, resp. Q také, že $|\sphericalangle PAI|=|\sphericalangle QAI|=1^\circ$. Keďže P a Q sú súmerné podľa priamky AI, úsečka PQ je rovnobežná s BC, a teda PIQ je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou PQ.



Všetky uvažované uhly s vrcholmi A, B, C sú najviac 60°. Vzhľadom na súmernosť bodov P a Q a rovnako bodov B a C podľa priamky AI stačí postupne rozobrať uhly s vrcholom P:

- $|\sphericalangle APQ| = 90° - |\sphericalangle PAI| = 90° - 1° = 89° \leq 136°$.
- $|\sphericalangle BPQ| = 180° - |\sphericalangle IPQ| = 180° - 45° = 135° \leq 136°$.
- $|\sphericalangle CPQ| \leq |\sphericalangle BPQ| \leq 136°$.
- $|\sphericalangle APB| = 360° - |\sphericalangle APQ| - |\sphericalangle BPQ| = 360° - 89° - 135° = 136°$.
- $|\sphericalangle BPC| \leq |\sphericalangle BPQ| \leq 136°$.
- $|\sphericalangle CPA| < |\sphericalangle CQA| = |\sphericalangle BPA| = 136°$.

Hľadané číslo je teda 135.

Poznámka:

Tvrdenie úlohy súvisí s nasledujúcim problémom: Pre dané n, kde $n \geq 3$, a daný uhol α rozhodnite, či každá množina n bodov v rovine obsahuje tri body, ktoré určujú konvexný uhol veľkosti aspoň α.

V roku 1941 dokázal Szekeres (https://www.jstor.org/stable/pdf/2371290.pdf) nasledujúce tvrdenie: Ak $k \geq 2$ a $\varepsilon > 0$, tak v rovine existuje množina 2^k bodov takých, že všetky konvexné uhly nimi určené majú veľkosť najviac $(1-1/k) \cdot 180° + \varepsilon$. Špeciálne v prípade $k = 4$ a $\varepsilon = 0{,}01°$ teda existuje množina 2^4 čiže 16 bodov roviny takých, že každé tri z nich určujú konvexný uhol veľkosti najviac 135,01°.

V roku 1960 potom Erdős a Szekeres spoločne dokázali (https://combinatorica.hu/p_erdos/1960-09.pdf) nasledujúce tvrdenie: Ak $k \geq 3$, tak každá množina 2^k bodov v rovine určuje konvexný uhol veľkosti aspoň $(1-1/k) \cdot 180°$. Špeciálne teda každá množina 16 bodov roviny určuje uhol veľkosti aspoň $(1 - 1/4) \cdot 180°$ čiže 135°.

Pre všeobecný počet bodov je táto otázka stále otvorená.

---

3 Nech p je najväčšie prvočíslo deliace prirodzené číslo n, kde $n > 1$. Pre každú neprázdnu podmnožinu deliteľov čísla n napíšeme súčet jej prvkov. Predpokladajme, že sme takto napísali viac ako p čísel z množiny $\{1, 2, \dots, p+2\}$ a žiadne číslo z tejto množiny sme nenapísali viackrát. Dokážte, že žiadne číslo sme nenapísali viackrát.

(Zdeněk Pezlar)

Riešenie:

Nech n vyhovuje podmienkam, potom všetky čísla z $\{1, \dots, p+2\}$ až na najviac jedno sú napísané práve raz.

Označme $D(n)$ množinu deliteľov čísla n. Zrejme platí $1 \in D(n)$.

Ukážeme sporom, že n je párne. Nech n je nepárne, teda $2 \notin D(n)$ a $p \geq 3$. Keby platilo $3 \notin D(n)$, tak by neboli napísané čísla 2 a 3, čo by bol spor. Takže platí $\{1, 3\} \subseteq D(n)$ a medzi napísanými číslami sú 1, 3 a $1+3$ čiže 4, nie však 2. Keby platilo $5 \notin D(n)$, tak by neboli napísané čísla 2 a 5, čo by bol spor. Takže $\{1, 3, 5\} \subseteq D(n)$ a $p \geq 5$. Keby platilo $7 \notin D(n)$, tak by neboli napísané čísla 2 a 7, čo by bol spor. Takže $\{1, 3, 5, 7\} \subseteq D(n)$ a $p \geq 7$. Číslo 8 je však potom napísané viackrát, a to ako $1+7$ a ako $3+5$, čo je hľadaný spor.

Označme k najväčšie prirodzené číslo také, že 2^k je deliteľom n, zrejme k je kladné. Rozoberme prípady:

- Nech $n = 2^k$.

  Potom $p = 2$ a $D(n) = \{2^0, \dots, 2^k\}$. Vďaka jednoznačnosti zápisu v dvojkovej sústave sú súčty rôznych neprázdnych podmnožín množiny $D(n)$ práve všetky rôzne čísla od 1 po $2^{k+1} - 1$.

- Nech n je deliteľné aj nejakým nepárnym prvočíslom.

  Označme q najmenšie z nich, potom $q \leq p$. Ukážeme sporom, že platí $q = 2^{k+1} + 1$. Rozoberme prípady:

  - Ak $q \leq 2^{k+1} - 1$, tak číslo q bude napísané raz ako súčet vhodných mocnín 2 a raz ako súčet množiny $\{q\}$, čo je spor.
  - Ak $q = 2^{k+1}$, tak q je párne, čo je spor.
  - Ak $q \geq 2^{k+1} + 2$, tak medzi napísanými číslami chýbajú 2^{k+1} a $2^{k+1} + 1$, pričom $2^{k+1} + 1 \leq p + 2$, čo je spor.

  Vďaka podmnožinám deliteľov čísla 2^k je medzi napísanými číslami práve raz každé z čísel od 1 po $2^{k+1} - 1$ a tiež číslo $2^{k+1} + 1$ čiže q, ale číslo 2^{k+1} chýba. Pripočítaním q k súčtom všetkých neprázdnych podmnožín deliteľov čísla 2^k vyjadríme práve raz aj každé z čísel od $q+1$ čiže $2^{k+1} + 2$ do $q + (2^{k+1} - 1)$ čiže 2^{k+2}. Tým sme zohľadnili súčty všetkých podmnožín množiny $\{2^0, \dots, 2^k\} \cup \{q\}$ deliteľov čísla n.

  Teraz ukážeme sporom, že číslo n nemá vo svojom rozklade žiadne iné nepárne prvočíslo rôzne od q: Nech r je najmenší nepárny prvočiniteľ n väčší ako q. Rozoberme prípady:

  - Nech $r \leq 2^{k+2}$.

    Potom je však už napísané číslo r napísané ešte raz ako súčet množiny $\{r\}$, čo je spor.

  - Nech $r = 2^{k+2} + 1$.

    Potom je číslo $2^{k+2} + 2$ čiže $r + 1$ napísané aspoň dvakrát, a to ako súčet deliteľov r a 1 a ako deliteľ $2q$, keďže n je párne.

  - Nech $r \geq 2^{k+2} + 2$.

    Potom okrem čísla 2^{k+1} nie je napísané ani číslo $2^{k+2} + 1$ čiže $2q - 1$, lebo je väčšie ako súčet ľubovoľnej podmnožiny deliteľov $\{2^0, \dots, 2^k\} \cup \{q\}$ a súčasne je menšie ako ľubovoľný iný deliteľ čísla n. Keďže však $2q - 1 < r < p + 2$, dostávame spor.

  Platí teda $n = 2^k \cdot q^l$, kde q je prvočíslo, $l \geq 1$ a $q = 2^{k+1} + 1$. Všetky delitele n sú zrejme tvaru $2^i q^j$. Sčítajme všetkých deliteľov s pevným j:

  $$q^j + 2q^j + \dots + 2^k q^j = (2^{k+1} - 1)q^j = (q-2)q^j < q^{j+1}.$$

  Súčet len niektorých z týchto deliteľov je preto v tvare $c_j \cdot q^j$, kde $c_j \in \{0, \dots, q-2\}$. Ak teda uvážime ľubovoľné napísané číslo a jeho zápis v sústave so základom q, musí príspevok pri mocnine q^j vzniknúť ako súčet niektorých z deliteľov s q^j v prvočíselnom rozklade. Z koeficientu pri q^j, ktorý je nanajvýš $q - 2$, potom vďaka jednoznačnosti zápisu v dvojkovej sústave už jednoznačne vyplýva, ktoré z deliteľov q^j, $2q^j$, ..., $2^k q^j$ sa v súčte vyskytli. Ku každému napísanému číslu tak môže prislúchať len jedna podmnožina $D(n)$.

Poznámka:

Z tohto vyplýva:

- Ak $n = 2^k$, tak napísané čísla sú 1, ..., $2^{k+1} - 1$.
- Ak $n = 2^k \cdot q^l$, kde $k, l \geq 1$, $q = 2^{k+1} + 1$ q je prvočíslo, tak napísané čísla sú práve tie, ktoré sú pri vyjadrení v sústave o základe q najviac $(l+1)$-ciferné a nikde neobsahujú cifru $q - 1$.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

4 Pozdĺž kružnice sú napísané aspoň 3 navzájom rôzne prvočísla. Pre každé dve susedné prvočísla určíme najväčšie prvočíslo deliace ich súčet. Takto získame až na poradie opäť rovnaké prvočísla, ako boli tie napísané. Nájdite všetky možné počiatočné množiny prvočísel.

(Napríklad prvočísla 2, 7, 3, 11, 17 v tomto poradí nevyhovujú, pretože zodpovedajúce súčty 9, 10, 14, 28, 19 majú najväčšie prvočíselné delitele postupne 3, 5, 7, 7, 19.)

(Michal Janík)

Riešenie:

Nech M je vyhovujúca množina prvočísel a p je najväčšie z nich. Keďže sú v M aspoň 3 prvočísla, platí $p \geq 5$. Podľa zadania je súčet niektorých dvoch rôznych prvočísel z M násobkom p. Súčet ľubovoľných dvoch rôznych prvočísel z M je však menší ako $p+p$ čiže $2p$, takže tento súčet je rovný p. Keďže p je nepárne, jedno zo sčítaných prvočísel je párne, t. j. je to 2, takže to druhé je $p-2$. Teda $2 \in M$ a $p-2 \in M$. Všimnime si tiež, že $p-2$ je druhým najväčším číslom v M, lebo číslo $p-1$ je párne a väčšie ako 2, takže to nie je prvočíslo.

Aj prvočíslo $p-2$ musí byť najväčším prvočiniteľom súčtu niektorých dvoch rôznych prvočísel z M. Najväčší možný súčet dvoch rôznych čísel z M je $p+(p-2)$ čiže $2p-2$, takže je menší než $3(p-2)$, a teda je to $2(p-2)$ alebo $p-2$. Ukážeme, že v oboch prípadoch platí $p-4 \in M$:

- Nech je tento súčet $2(p-2)$.

  Sčítance sú rôzne, takže väčší z nich je väčší ako $p-2$. Jediné také číslo v M je však p, takže druhý sčítanec je $2(p-2)-p$ čiže $p-4$.
- Nech je tento súčet $p-2$.

  Prvočíslo $p-2$ je nepárne, teda jeden zo sčítancov je 2 a druhý $(p-2)-2$ čiže $p-4$.

Ukázali sme teda, že množina M obsahuje prvočísla p, $p-2$ a $p-4$. Tieto čísla majú rôzne zvyšky po delení 3, takže jedno z nich je deliteľné 3, a teda je to 3. Ide teda o prvočísla 3, 5, 7. Vieme tiež, že $2 \in M$, a keďže 7 je podľa predpokladu najväčšie prvočíslo v M, iné prvočísla M neobsahuje.

Ukážeme, že množina $\{2, 3, 5, 7\}$ vyhovuje zadaniu: Jej prvky stačí pozdĺž kružnice napísať v poradí 2, 5, 3, 7, príslušné súčty sú potom postupne 7, 8, 10, 9 s najväčšími prvočíselnými deliteľmi postupne 7, 2, 5, 3.

Jediná vyhovujúca množina je teda $\{2, 3, 5, 7\}$.

---

5 Nájdite všetky kladné prirodzené čísla n s nasledujúcou vlastnosťou: Vo štvorcovej tabuľke $n \times n$ sa dá vyfarbiť $2n$ políčok tak, že žiadne dve z nich nesusedia stranou ani vrcholom a v každom riadku aj každom stĺpci sú vyfarbené práve 2 políčka.

(Jakub Štepo)

Riešenie:

Zrejme $n \geq 2$. Rozoberme prípady:

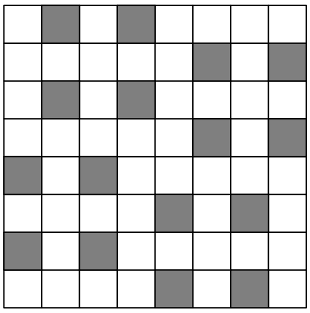
- Nech $2 \leq n \leq 7$.

  V ľubovoľných 2 susedných riadkoch tabuľky sú spolu 4 vyfarbené políčka, pričom však žiadne dve z nich nemôžu byť v rovnakom stĺpci ani v susedných stĺpcoch. Medzi každými dvoma z týchto 4 stĺpcov tak musí byť aspoň 1 ďalší, takže $n \geq 4+3=7$, a teda $n=7$.

  V ľubovoľných 2 susedných riadkoch tabuľky je tak po 1 vyfarbenom políčku práve v 1., 3., 5., 7. stĺpci zľava. V 1. stĺpci je teda vyfarbené 1 políčko v 1. alebo 2. riadku, 1 políčko v 3. alebo 4. riadku a 1 políčko v 5. alebo 6. riadku, spolu sú tam teda aspoň 3 vyfarbené políčka, čo je spor.

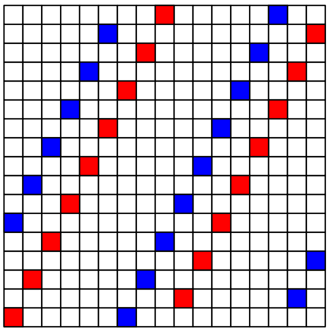
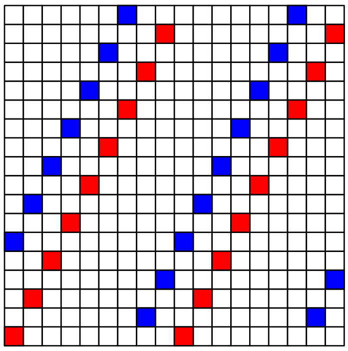
  Tento prípad teda nevyhovuje.
- Nech $n=8$.

  Vyhovujúce ofarbenie je napríklad takéto:



- Nech $n \geq 9$.

  Riadky i stĺpce očíslujme číslami od 0 do $n-1$ a políčko v x. stĺpci zľava a y. riadku zdola označme (x, y). Pre každé i z $\{0, \dots, n-1\}$ nech $A_i = (i, 2i \bmod n)$ a $B_i = (i, (2i+5) \bmod n)$. Políčka A_0, ..., A_{n-1} vyfarbime červenou a políčka B_0, ..., B_{n-1} modrou.

  V každom stĺpci je teda jedno červené a jedno modré políčko. Ak je n nepárne, aj v každom riadku je jedno červené a jedno modré políčko. Ak je n párne, v každom riadku sú buď dve červené, alebo dve modré políčka.

  Ukážeme, že žiadne dve vyfarbené políčka nesusedia, zrejme stačí vyšetriť len dvojice v rovnakých alebo susedných stĺpcoch:

  - Políčka B_i a A_i, kde $i \in \{0, \dots, n-1\}$, nesusedia, lebo rozdiel čísel ich riadkov dáva po delení n zvyšok 5.
  - Políčka A_i a A_{i+1}, kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo sa čísla ich riadkov líšia aspoň o 2.
  - Políčka B_i a B_{i+1} kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo sa čísla ich riadkov líšia aspoň o 2.
  - Políčka B_i a A_{i+1}, kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo rozdiel čísel ich riadkov dáva po delení n zvyšok 3.
  - Políčka A_i a B_{i+1}, kde $i \in \{0, \dots, n-2\}$, nesusedia, lebo rozdiel čísel ich riadkov dáva po delení n zvyšok $n-7$, čo je aspoň 2.

Vyhovujú teda práve čísla väčšie než 7.

Poznámka:

Uvedené farbenie v prípade $n = 8$ je až na osovú súmernosť jediné.

---

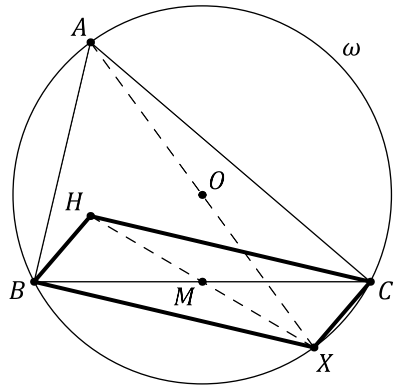
6 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme H priesečník jeho výšok, ω kružnicu jemu opísanú a O jej stred. Ďalej označme M stred strany BC a D priesečník priamky AH s kružnicou ω rôzny od A. Priamka DM pretína kružnicu ω v bode E rôznom od D. Nech F je priesečník priamky AE s kružnicou opísanou trojuholníku OME rôzny od E. Dokážte, že platí $|FH| = |FA|$.

(Michal Pecho)

Riešenie:

Nech X je obraz bodu A v súmernosti podľa stredu O, úsečka AX je teda priemer ω.

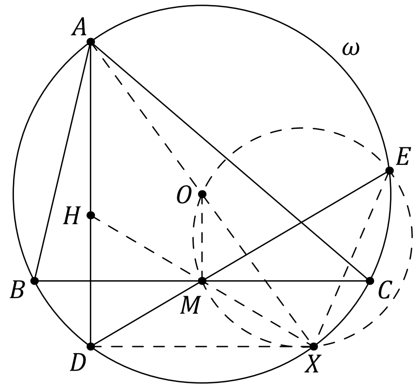
Podľa Tálesovej vety je BX kolmá na AB, a keďže aj priamka CH obsahujúca výšku z C je na ňu kolmá, sú navzájom rovnobežné. Analogicky sú rovnobežné aj priamky BH a CX, takže štvoruholník $BXCH$ je rovnobežník. Bod M ako stred jeho uhlopriečky BC je teda aj stredom jeho druhej uhlopriečky HX.



Keďže O leží na osi strany BC, priamka OM je kolmá na BC, a preto rovnobežná s AD, takže uhly MOX a DAX sú súhlasné. Preto podľa vety o obvodových uhloch pre tetivu DX máme

$$|\sphericalangle MOX| = |\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle DEX| = |\sphericalangle MEX|,$$

z čoho opäť podľa tejto vety pre tetivu MX dostávame, že štvoruholník $MOEX$ je tetivový.



Podľa Tálesovej vety je uhol AEX čiže FEX pravý, takže opäť podľa tejto vety je FX priemerom kružnice opísanej OME. Opäť podľa tejto vety sú uhly FOX a FMX pravé, a keďže O a M sú stredy úsečiek AX, resp. HX, F leží na ich osiach. Preto $|FA| = |FX| = |FH|$.