1999/2000
49. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 24. – 30. 4. 2000.*)

1. Nech a, b, c sú tri prirodzené čísla s vlastnosťami, pričom a^3 je deliteľné číslom b, b^3 je deliteľné číslom c a c^3 je deliteľné číslom a. Ukážte, že $(a+b+c)^{13}$ je deliteľné číslom abc.

2. Dokážte, že existuje mnohočlen $p(x)$ s celočíselnými koeficientmi taký, že pre každé $x \in \in \langle \frac{1}{10}, \frac{9}{10} \rangle$ platí

$$\left| p(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{1000}.$$

3. Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník taký, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokážte, že (predĺžené) výšky trojuholníkov BCD, DEF, FAB postupne z vrcholov C, E, A sa pretínajú v jednom bode.

4. Majme dané postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platia nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n, & b_{n+1} &= b_n + c_n, \\ c_{n+1} &= c_n + d_n, & d_{n+1} &= d_n + a_n. \end{aligned}$$

Dokážte, že ak existujú $k \geqq 1$, $m \geqq 1$ také, že platí

$$\begin{aligned} a_{k+m} &= a_m, & b_{k+m} &= b_m, \\ c_{k+m} &= c_m, & d_{k+m} &= d_m, \end{aligned}$$

tak potom $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0$.

5. Nech P, Q, R sú postupne stredy kružnicových oblúkov BC, CA, AB kružnice opísanej danému trojuholníku ABC. K, L, M nech ďalej označujú postupne stredy jeho strán BC, CA, AB a I stred kružnice tomuto trojuholníku vpísanej. Dokážte, že platí

$$|AI| \cdot |BI| \cdot |CI| = 8 \cdot |KP| \cdot |LQ| \cdot |MR|.$$

6. Pre n prirodzené riešte v obore reálnych čísel rovnicu

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1} = \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_{n+1}} - \frac{n+1}{4}.$$

7. Je daných n reálnych čísel

$$1 \geqq x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots x_n > 0$$

a reálne číslo $a \in \langle 0, 1 \rangle$. Dokážte nerovnosť

$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^a \leqq 1 + x_1^a + \frac{1}{2}(2x_2)^a + \frac{1}{3}(3x_3)^a + \ldots \frac{1}{n}(nx_n)^a.$$

8. Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do kružnice so stredom O. Nech P je priesečník uhlopriečok AC a BD. Stredy opísaných kružníc trojuholníkom ABP, BCP, CDP a DAP

sú postupne O_1, O_2, O_3 a O_4. Dokážte, že priamky OP, O_1O_3 a O_2O_4 sa pretínajú v jednom bode.

9. Majme číslo

$$N = 0\,2\,5\,8\,6\,5\,4\,1\,3\,9\,8\,9\,7\,3\,2.$$

Keď sa pozeráme zľava, tak sa nám číslo N rozpadne na šesť rastúcich a klesajúcich reťazcov cifier

$$0258,\ 86541,\ 139,\ 99,\ 89,\ 9732.$$

Uvažujme len maximálne reťazce, t. j. reťazce idúce od jednej zmeny smeru (z rastúcej na klesajúcu alebo naopak) k druhej. Pripusťme aby naše číslo začínalo 0, ale aby malo každé dve susedné cifry rôzne. Aký je priemerný počet maximálnych reťazcov v týchto n-ciferných číslach?

10. Je daných n celočíselných aritmetických postupností $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Dokážte, že ak každé dve postupnosti majú spoločný člen, tak potom majú všetky postupnosti spoločný člen. Dokážte, že ak môžu mať postupnosti reálne hodnoty, tak tvrdenie nemusí platiť.

11. Vrcholy A, B, C ostrouhlého trojuholníka ABC ležia postupne na stranách B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$ tak, že platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle A_1B_1C_1|$, $|\measuredangle BCA| = |\measuredangle B_1C_1A_1|$ a $|\measuredangle CAB| = |\measuredangle C_1A_1B_1|$. Dokážte, že ortocentrá (priesečníky výšok) trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$ sú rovnako vzdialené od stredu kružnice opísanej trojuholníku ABC.

12. V pravouhlom súradnicovom systéme je každému mrežovému bodu (bod s celočíselnými súradnicami) priradené reálne číslo tak, že žiadnym dvom mrežovým bodom nie je priradené to isté číslo. Nech A je ľubovoľná neprázdna konečná množina mrežových bodov v tomto systéme, ktorá je stredovo symetrická vzhľadom na počiatok O súradnicového systému, $O \notin A$. Dokážte, že potom existuje mrežový bod X roviny taký, že ak A_X je obraz množiny X v posunutí o vektor $\overrightarrow{OX}$, tak aspoň polovica čísel priradených bodom množiny A_X je väčšia ako číslo priradené bodu X.

13. Označme $d(n)$ počet kladných celočíselných deliteľov prirodzeného čísla n. Nájdite všetky prirodzené čísla, pre ktoré platí $n = (d(n))^2$.

14. Všetky tri vrcholy trojuholníka majú obe súradnice celočíselné, dĺžka jednej zo strán je $\sqrt{n}$, kde n nie je deliteľné žiadnou druhou mocninou prvočísla. Dokážte, že pomer polomeru vpísanej a opísanej kružnice tomuto trojuholníku je iracionálne číslo.

15. Nájdite všetky funkcie $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$h(x + y) + h(xy) = h(x)h(y) + 1.$$

16. Karty očíslované číslami $1, 2, \ldots, 32$ sú náhodne zoradené vedľa seba. V jednom ťahu môžeme vybrať nejaký blok po sebe idúcich kariet, ktorých čísla sú zoradené vzostupne alebo zostupne, a položiť ho v opačnom poradí. Napríklad $\ldots 11\ \underline{4\ 5\ 10}\ 26\ 8 \ldots$ môže byť zmenené na $\ldots 11\ \underline{10\ 5\ 4}\ 26\ 8 \ldots$ Dokážte, že po najviac 58 ťahoch môžeme zoradiť karty tak, že ich čísla budú zoradené vzostupne alebo zostupne.

17. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník a kladné reálne číslo k. Nech E a F sú body postupne na stranách AB a CD také, že $|AE| : |EB| = |CF| : |FD| = k$. Nech P je taký bod na úsečke EF, že $|PE| : |PF| = |AB| : |CD|$. Dokážte, že pomer obsahov trojuholníkov APD a BPC nezávisí od čísla k.

18. Nájdite všetky dvojice (a, b) reálnych čísel také, že pre každé prirodzené číslo platí $a\lfloor bn\rfloor = b\lfloor an\rfloor$. (Pripomeňme, že $\lfloor x\rfloor$ znamená najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné x.)