MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh krajského kola kategórie C

1 Dvojciferné číslo $\overline{ab}$ nazveme *nafúknuteľné*, ak z neho po pripočítaní 990-násobku vhodného jednociferného čísla získame štvorciferné číslo $\overline{axxb}$ s nenulovou cifrou x. Koľko nafúknuteľných čísel existuje?

(Mária Dományová)

Riešenie 1:

Nech $\overline{ab}$ je nafúknuteľné číslo, x príslušná cifra a y to vhodné jednociferné číslo také, že

$$\overline{ab} + 990y = \overline{axxb},$$

pričom zrejme $y \neq 0$. Potom ekvivalentne

$$(10a + b) + 990y = 1000a + 100x + 10x + b,$$

$$990y - 990a = 110x,$$

$$9y - 9a = x,$$

$$9(y - a) = x.$$

Nenulová cifra x je deliteľné 9, takže $x = 9$. Preto ďalej ekvivalentne

$$9(y - a) = 9,$$

$$y - a = 1,$$

$$y = a + 1.$$

Keďže y je jednociferné a nenulové, a môže nadobudnúť ľubovoľnú z 8 hodnôt z $\{1, \dots, 8\}$. Pretože b môže byť ľubovoľná z 10 cifier, existuje $8 \cdot 10$ čiže 80 nafúknuteľných čísel, a to 10, …, 89.

Pokyny:

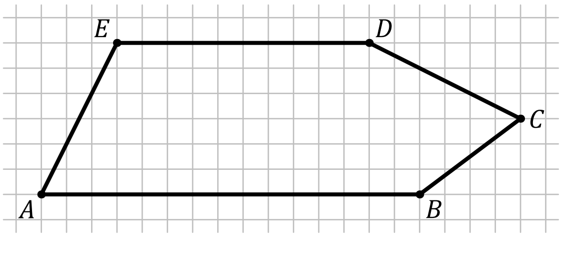
V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 Za odvodenie rovnosti $9y - 9a = x$ alebo ekvivalentnej rovnosti dajte 2 body.
- A2 Za hypotézu, že $x = 9$, dajte 1 bod, ak je úplne zdôvodnená, dajte 3 body.
- B1 Za tvrdenie, že a môže nadobúdať ľubovoľnú z hodnôt 1 …, 8, dajte 1 bod.
- B2 Za tvrdenie, že b môže nadobúdať ľubovoľnú z hodnôt 0, …, 9, dajte 1 bod.
- B3 Za výpočet správneho počtu nafúknuteľných čísel dajte 1 bod.

Nech a_i je počet bodov za Ai a b_i za Bi. Celkovo potom dajte $\max\{a_1, a_2\} + b_1 + b_2 + b_3$ bodov.

Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.

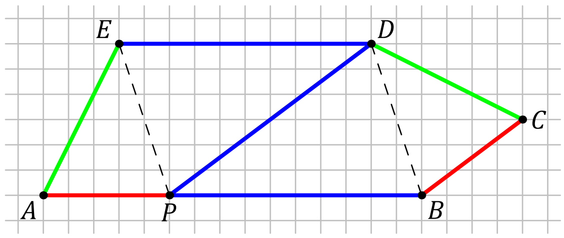
2 V štvorcovej sieti leží päťuholník $ABCDE$, ktorého vrcholy sú v mrežových bodoch rovnako ako na obrázku. Dokážte, že tento päťuholník sa dá rozdeliť na dva zhodné štvoruholníky.



(Jaroslav Zhouf, Josef Tkadlec)

Riešenie:

Hľadané rozdelenie na štvoruholníky $APDE$ a $PBCD$ je na obrázku Nech P je taký bod na strane AB, že $BDEP$ je rovnobežník.



Potom trojuholníky PBD a DEP sú zhodné. Navyše sú rovnoramenné, pretože podľa Pytagorovej vety

$$|PD| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 = |PB|\,.$$

Aj trojuholníky BCD a PAE sú pri tomto poradí vrcholov podľa vety *sss* zhodné, lebo

$$|BC| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 = |PA|\,,$$

$$|CD| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = |AE|$$

a

$$|BD| = \sqrt{6^2 + 2^2} = |PE|\,.$$

Štvoruholníky $PBCD$ a $DEAP$ sú teda zhodné.

Poznámka:

Napriek tomu, že vyššie uvedené riešenie je úplné, uvedieme ešte postup, ako sa na takéto rozdelenie dá prísť. Uvažujme najskôr rozdelenie päťuholníka jedným priamym rezom. Rez nemôže prechádzať dvoma vrcholmi, pretože by rozdelil päťuholník na štvoruholník a trojuholník. Ak rez neprechádza žiadnym vrcholom a jedna z častí bude štvoruholník, bude druhá časť päťuholník. Rez teda musí prechádzať jedným vrcholom a protiľahlou stranou. Je zrejmé, že rozdelená musí byť strana AB, pretože je najdlhšia, a teda rez bude prechádzať bodom D. Z Pytagorovej vety (ako vyššie) nahliadneme, že $|CD| = |AE|$ a $|BC| = 5$, ďalej $|AB| = 15$, $|ED| = 10$. Keďže P je priesečník rezu s AB, platí $|AP| = |BC| = 5$.

Kvôli úplnosti ešte uvažujme prípad, kedy rozdelíme päťuholník lomenou čiarou pozostávajúcou z aspoň k úsečiek, kde $k \geq 2$. Aj keby sa rez začínal a končil vo vrcholoch, a nerozdelil tak žiadnu zo strán päťuholníka, výsledné mnohouholníky by mali $n + k$ a $5 - n + k$ strán, t. j. dokopy $5 + 2k \geq 9$, nemôžu to teda byť oba štvoruholníky. Tým sme dokázali (aj keď to od nás zadanie nevyžadovalo), že vyššie nájdené rozdelenie je jediné.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 Za zdôvodnené tvrdenie, že rez musí prechádzať bodom D a rozdeliť stranu AB, dajte 1 bod.
- A2 Za nájdenie vhodného rozdelenia bez správneho zdôvodnenia dajte 3 body.
- B1 Za zdôvodnenie rovnosti $|DC| = |AE|$ dajte 1 bod.

Nech a_i je počet bodov za Ai a b_i za Bi. Celkovo potom dajte $\max\{a_1, a_2\} + b_1$ bodov.

Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.

Na úplné zdôvodnenie zhodnosti vzniknutých štvoruholníkov nestačí len konštatovanie, že oba majú rovnako dlhé príslušné strany. Za nezohľadnenie tohto argumentu strhnite 2 body.

---

3 Koľkými spôsobmi je možné vyfarbiť štvorcovú tabuľku 4×4 štyrmi rôznymi farbami tak, aby každé jej políčko bolo vyfarbené práve jednou farbou a aby v každej z 9 menších štvorcových tabuliek 2×2 bola každá farba práve raz?

(Jana Kopfová)

Riešenie 1:

Označme (a, b) políčko v riadku a a v stĺpci b.

Prostrednú tabuľku 2×2 ofarbíme na začiatku, môžeme to urobiť $4!$ čiže 24 spôsobmi. Farby označme A, B, C, D ako na obrázku:

	A	B	
	C	D	

Potom políčka $(1, 2)$ a $(1, 3)$ nemajú farbu A ani B. Rozoberme prípady:

- Nech má $(1, 2)$ farbu C a $(1, 3)$ farbu D.

	C	D	
	A	B	
	C	D	

  Políčka $(4, 2)$ a $(4, 3)$ nemajú farbu C ani D. Rozoberme prípady:

  - Nech má $(4, 2)$ farbu A a $(4, 3)$ farbu B.

	C	D	
	A	B	
	C	D	
	A	B	

    Potom sú v 1. stĺpci striedavo farby B a D, čo možno urobiť 2 spôsobmi, a v 4. stĺpci striedavo farby A a C, čo možno urobiť tiež 2 spôsobmi.

    V tomto prípade teda existujú práve $2 \cdot 2$ čiže 4 vyhovujúce spôsoby.

  - Nech má $(4, 2)$ farbu B a $(4, 3)$ farbu A.

	C	D	
	A	B	
	C	D	
	B	A	

    Potom má $(3, 1)$ farbu D a $(3, 2)$ farbu C.

	C	D	
	A	B	
D	C	D	C
	B	A	

    Farby zvyšných políčok sú už jednoznačné, keďže sú to vždy posledné nevyplnené políčka v aktuálne jedinej tabuľke 2×2. V tomto prípade teda existuje práve 1 vyhovujúci spôsob.

  V tomto prípade teda existuje práve $4 + 1$ čiže 5 vyhovujúcich spôsobov.

- Nech má $(1, 2)$ farbu D a $(1, 3)$ farbu C.

	D	C	
	A	B	
	C	D	

  Potom má $(3, 1)$ farbu B a $(3, 2)$ farbu A.

	D	C	
B	A	B	A
	C	D	

  Potom má $(1, 1)$ farbu C, $(3, 1)$ farbu D, $(1, 4)$ farbu D a $(3, 4)$ farbu C.

C	D	C	D
B	A	B	A
D	C	D	C

  Potom sú v 4. riadku striedavo farby A a B, čo možno urobiť 2 spôsobmi.

  V tomto prípade teda existujú práve 2 vyhovujúce spôsoby.

Pre pevné vyplnenie prostrednej tabuľky 2×2 teda existuje práve $5 + 2$ čiže 7 vyhovujúcich spôsobov. Všetkých vyhovujúcich vyfarbení je preto $24 \cdot 7$ čiže 168.

Riešenie 2:

Označme (a, b) políčko v riadku a a v stĺpci b.

Rozoberme prípady:

- Nech sú prvé 3 políčka 1. riadku ofarbené rôznymi farbami.

  To je možné urobiť $4 \cdot 3 \cdot 2$ čiže 24 spôsobmi.

  Ich farby označme postupne A, B, C, štvrtú farbu označme D.

A	B	C	

  Potom $(2, 2)$ má farbu D, takže $(2, 1)$ má farbu C a $(2, 3)$ farbu A.

A	B	C	
C	D	A	

  Potom $(3, 2)$ má farbu B, takže $(3, 1)$ má farbu A a $(3, 3)$ farbu C.

A	B	C	
C	D	A	
A	B	C	

  Potom $(4, 2)$ má farbu D, takže $(4, 1)$ má farbu C a $(4, 3)$ farbu A.

A	B	C	
C	D	A	
A	B	C	
C	D	A	

  Potom sú v 4. stĺpci striedavo farby B a D, čo možno urobiť 2 spôsobmi.

  V tomto prípade teda existuje práve $24 \cdot 2$ čiže 48 vyhovujúcich spôsobov.

- Nech nie sú prvé 3 políčka 1. riadku ofarbené rôznymi farbami.

  To znamená, že $(1, 1)$ a $(1, 3)$ majú rovnakú farbu, označme ju A. Nech B je farba $(1, 2)$. To je možné urobiť $4 \cdot 3$ čiže 12 spôsobmi.

A	B	A	

  Rozoberme prípady:

  - Nech $(1, 4)$ má farbu B.

A	B	A	B

    Zvyšné farby označme C a D. Potom sú v 2. riadku striedavo farby C a D, čo možno urobiť 2 spôsobmi, ďalej v 3. riadku striedavo farby A a B, čo možno urobiť tiež 2 spôsobmi, a ďalej v 4. riadku striedavo farby C a D, čo možno urobiť tiež 2 spôsobmi.

    V tomto prípade teda existujú práve $12 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 96 vyhovujúcich spôsobov.

- Nech $(1, 4)$ nemá farbu B.

  To môžeme urobiť 2 spôsobmi. Označme túto farbu C a zvyšnú D.

A	B	A	C

  Potom $(2, 3)$ má farbu D, takže $(2, 2)$ má farbu C a $(2, 4)$ farbu B.

A	B	A	C
	C	D	B

  Potom $(3, 3)$ má farbu A, takže $(3, 2)$ má farbu B a $(3, 4)$ farbu C.

A	B	A	C
	C	D	B
	B	A	C

  Potom $(4, 3)$ má farbu D, takže $(4, 2)$ má farbu C a $(4, 4)$ farbu B.

A	B	A	C
	C	D	B
	B	A	C
	C	D	B

  Farby zvyšných políčok sú už jednoznačné, keďže sú to vždy posledné nevyplnené políčka v aktuálne jedinej tabuľke 2×2. V tomto prípade teda existuje práve $12 \cdot 2$ čiže 24 vyhovujúcich spôsobov.

Všetkých vyhovujúcich vyfarbení je preto $48 + 96 + 24$ čiže 158.

Pokyny:

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

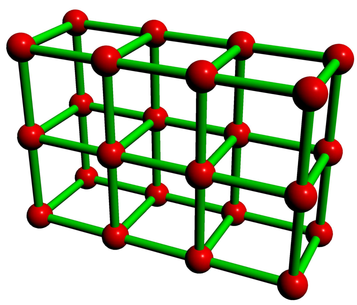
Za tvrdenie, že tabuľku 2×2 je možné požadovaným spôsobom vyfarbiť 24 spôsobmi, dajte 1 bod, pokiaľ je tvrdenie úplne zdôvodnené, dajte 2 body.

Ďalšie 1 až 3 body dajte podľa úplnosti rozboru možných prípadov.

Za numerickú chybu pri sčítaní či násobení strhnite 1 bod.

---

4 Lenka stavia konštrukciu tvaru kvádra z magnetických tyčiniek dĺžky 1 a kovových guľôčok. Na konštrukciu $2 \times 3 \times 1$ (pozri obrázok) spotrebovala 46 tyčiniek a 24 guľôčok. Na inú konštrukciu $a \times b \times 1$, pričom $b \geq a \geq 1$, spotrebovala 679 tyčiniek. Koľko na ňu spotrebovala guľôčok? Určte všetky možnosti.



(Jana Kopfová, Lenka Kopfová, Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

V prednej vrstve ležia vodorovné tyčinky v $a+1$ riadkoch, každý z nich obsahuje b tyčiniek, a zvislé tyčinky v $b+1$ stĺpcoch, každý z nich obsahuje a tyčiniek. V prednej vrstve je preto $b(a + 1) + a(b + 1)$ tyčiniek. Rovnaký počet ich je aj v zadnej vrstve.

Tyčiniek, ktoré spájajú prednú a zadnú vrstvu, je v každej z $a+1$ vodorovných rovín $b+1$, takže spolu je ich $(a+1)(b+1)$.
Platí teda

$$(b(a+1)+a(b+1))+(b(a+1)+a(b+1))+(a+1)(b+1)=679,$$

ekvivalentne

$$(ab+b)+(ab+a)+(ab+b)+(ab+a)+(ab+a+b+1)=679,$$

$$5ab+3a+3b=678,$$

$$5a\cdot 5b+5a\cdot 3+5b\cdot 3=5\cdot 678,$$

$$5a\cdot 5b+5a\cdot 3+5b\cdot 3+3\cdot 3=5\cdot 678+3\cdot 3,$$

$$(5a+3)(5b+3)=3399,$$

$$(5a+3)(5b+3)=3\cdot 11\cdot 103.$$

Keďže sú čísla $5a+3$ a $5b+3$ prirodzené a väčšie ako 3 a platí $5a+3\leq 5b+3$, ďalej ekvivalentne

$$(5a+3,5b+3)\in\{(11,309),(33,103)\},$$

$$(5a,5b)\in\{(8,306),(30,100)\},$$

a pretože 8 nie je deliteľné 5, ekvivalentne

$$(5a,5b)=(30,100),$$

$$(a,b)=(6,20).$$

Pokyny:
V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

A1 Za správne vyjadrenie počtu potrebných tyčiniek pomocou a a b dajte 2 body, z toho 1 bod za správne zdôvodnenie.

A2 Za úpravu rovnice na súčinový tvar dajte 2 body.

A3 Za nájdenie riešenia dajte 1 bod.

Nech a_i je počet bodov za Ai. Celkovo potom dajte $a_1+a_2+a_3$ bodov.
Za numerickú chybu strhnite najviac 1 bod.