MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh krajského kola kategórie B

1 V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2z + 1 = 0,$$

$$y^2 - xy - 2y + 2x = 0.$$

(Mária Dományová)

Riešenie 1:

Druhú rovnicu postupne upravíme:

$$y(y - x) - 2(y - x) = 0,$$

$$(y - x)(y - 2) = 0,$$

$$(y = x) \vee (y = 2).$$

Rozoberme prípady:

- Ak $y = x$, tak dosadením do prvej rovnice dostávame postupne

$$x^2 + 4x^2 + z^2 - 4x^2 - 2z + 1 = 0,$$

$$x^2 + z^2 - 2z + 1 = 0,$$

$$x^2 + (z - 1)^2 = 0.$$

  Súčet štvorcov na ľavej strane je nulový iba v prípade $x = 0$ a $z = 1$. To dáva riešenie $(0, 0, 1)$.

- Ak $y = 2$, tak podobne dostávame

$$x^2 + 16 + z^2 - 8x - 2z + 1 = 0,$$

$$x^2 - 8x + 16 + z^2 - 2z + 1 = 0,$$

$$(x - 4)^2 + (z - 1)^2 = 0,$$

  čo platí, len keď $x = 4$ a $z = 1$. To dáva riešenie $(4, 2, 1)$.

Dokopy máme dve riešenia, a to $(0, 0, 1)$ a $(4, 2, 1)$. Skúškou správnosti ľahko overíme, že obe vyhovujú.

Riešenie 2:

Sústavu ekvivalentne upravíme na

$$(x - 2y)^2 + (z - 1)^2 = 0,$$

$$(y - x)(y - 2) = 0.$$

Prvá rovnosť platí, práve keď $x = 2y$ a $z = 1$. Druhá rovnosť platí, práve keď $y = x$ alebo $y = 2$. To dokopy dáva dve riešenia $(0, 0, 1)$ a $(4, 2, 1)$.

Riešenie 3:

Z druhej rovnice si vyjadríme x pomocou y:

$$y^2 - xy - 2y + 2x = 0,$$

$$y(y - 2) = x(y - 2),$$

z čoho za predpokladu $y \neq 2$ máme $x = y$. Rozoberme prípady:

- Ak $y = x$, tak prvú rovnicu riešime ako kvadratickú s premennou x:
  $$x^2 + 4x^2 + z^2 - 4x^2 - 2z + 1 = 0,$$
  $$x^2 = -z^2 + 2z - 1,$$
  $$x^2 = -(z-1)^2.$$
  Aby existovalo riešenie, výraz $-(z-1)^2$ musí byť nezáporný, čo sa stane iba v prípade $z = 1$. Vtedy dostaneme
  $$x^2 = 0,$$
  $$x = 0.$$
  Máme tak kandidáta na riešenie $(0, 0, 1)$.
- Ak $y = 2$, tak dostávame kvadratickú rovnicu s premennou x
  $$x^2 + 16 + z^2 - 8x - 2z + 1 = 0,$$
  t. j.
  $$x^2 - 8x + z^2 - 2z + 17 = 0.$$
  Tá má diskriminant D, kde
  $$D = 64 - 4(z^2 - 2z + 17) = -4z^2 + 8z - 4 = -4(z-1)^2,$$
  ktorý je nezáporný len v prípade $z = 1$ a pre túto hodnotu dostaneme $x = 4$. Teda máme kandidáta na riešenie $(4, 2, 1)$.

Skúškou správnosti ľahko overíme, že obe nájdené trojice $(0, 0, 0)$ a $(4, 2, 1)$ vyhovujú.

Komentár:

Pri prvom a poslednom riešení sa vieme zaobísť bez skúšky správnosti, ak pri každej úprave či úvahe zdôrazníme jej ekvivalentnosť. Avšak vzhľadom na dĺžku riešenia je jednoduchšie spraviť skúšku ako každý krok starostlivo kontrolovať.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky z vyššie popísaného postupu nasledovne:

A1 Dôkaz, že z druhej rovnice vyplýva „$x = y$ alebo $y = 2$“: 2 body

A2 Dôkaz, že z prvej rovnice vyplýva „$x = 2y$ a $z = 1$“: 3 body

A3 Vyriešenie prvej rovnice v jednom z prípadov $x = y$ a $y = 2$: 2 body

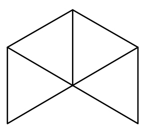
A4 Uvedenie oboch riešení spolu so zdôvodnením, že obe vyhovujú (či už skúškou správnosti, alebo použitím ekvivalentných úprav): 1 bod

Počet bodov za krok Ai označíme a_i.

Celkovo potom za neúplné riešenia udeľte $a_1 + \max\{a_2, a_3\} + a_4$ bodov.

---

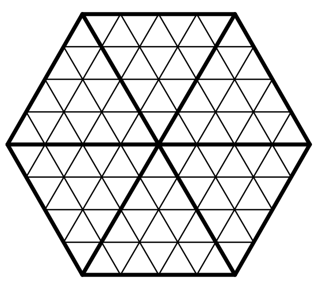
2 Určte všetky kladné prirodzené čísla n také, že pravidelný šesťuholník so stranou dĺžky n sa dá rozrezať na útvary ako na obrázku zložené zo štyroch rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1.



(Anastasia Bredichina)

Riešenie:

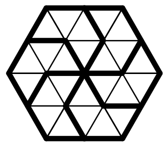
Pravidelný šesťuholník so stranou n sa dá rozdeliť na 6 rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky n (ako na obrázku v prípade $n = 4$).



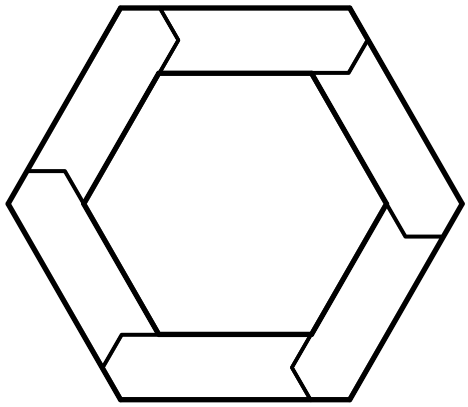
Každý z nich obsahuje $(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1$ čiže n^2 rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1. Šesťuholník preto obsahuje $6n^2$ rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1. Aby sa dal pokryť útvarmi zo zadania, musí platiť $4 \mid 6n^2$, t. j. $2 \mid 3n^2$, preto n je párne.

Nech teda $n = 2k$ pre nejaké kladné prirodzené číslo k. Matematickou indukciou dokážeme, že šesťuholník možno rozrezať podľa zadania:

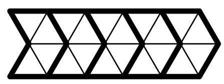
1 Rozrezanie pre prípad $k = 1$ (teda $n = 2$) je na obrázku:



2 Predpokladajme, že pre nejaké kladné prirodzené číslo k vieme rozrezať šesťuholník so stranou dĺžky $2k$. Šesťuholník so stranou dĺžky $2k+2$ rozrežeme tak, že ho rozdelíme na šesťuholník so stranou dĺžky $2k$ s ním rovnoľahlý podľa so spoločného stredu, ktorý už vieme rozrezať, a na „medzišestiuholníčie“.



To vieme rozrezať na 6 zhodných nekonvexných šesťuholníkov zložených z $2k+1$ útvarov, ktoré sú navzájom posunuté a majú spoločnú os súmernosti.



Takto sme dostali hľadané rozrezanie šesťuholníka so stranou $2k+2$.

Vyhovujú teda práve všetky párne kladné prirodzené čísla.

Komentár:

V prvej časti riešenia môžeme vylúčiť nepárne n aj pomocou obsahov. Obsah rovnostranného trojuholníka so stranou a je $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$, preto obsah útvaru je $\sqrt{3}$ a obsah šesťuholníka $6 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}n^2$. Ich podiel $\frac{3}{2}n^2$ musí byť prirodzené číslo.

Poznámka:

Dá sa ukázať, že popísaný spôsob rezania je v zásade jediný: Existujú tri spôsoby odrezania dieliku v rohu šesťuholníka. Jeden z nich vedie k sporu a zvyšné dva vedú k postupnému odrezaniu dielikov pozdĺž obvodu šesťuholníka buď v smere, alebo proti smeru hodinových ručičiek, ponechajúc v strede šesťuholník so stranou kratšou o 2. Všetkých možných rozrezaní šesťuholníka so stranou $2k$ je preto 2^k.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky z vyššie popísaného postupu nasledovne:

A1 Dôkaz, že celý šesťuholník sa skladá zo $6n^2$ jednotkových trojuholníkov, resp. analogické vyjadrenie obsahu šesťuholníka: 1 bod

A2 Dôkaz, že pre nepárne n nemožno šesťuholník rozrezať: 2 body

B1 Príklad rozdelenia šesťuholníka so stranou 2: 1 bod

B2 Príklad rozdelenia šesťuholníka so stranou konkrétnej dĺžky aspoň 4: 2 body

B3 Dôkaz, že pre každé párne n možno šesťuholník rozrezať podľa zadania: 4 body

Počet bodov za krok Ai, resp. Bi označíme a_i, resp. b_i.

Celkovo potom za neúplné riešenia udeľte $\max\{a_1, a_2\} + \max\{b_1, b_2, b_3\}$ bodov.

V kroku B3 nestačí uviesť príklady pre zopár konkrétnych n, treba aj všeobecný popis. Nie je nutné explicitne spomínať matematickú indukciu (iteráciu, rekurziu) stačí jej neformálny popis.

---

3 Nech I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Obraz kružnice k opísanej trojuholníku BIC v osovej súmernosti podľa priamky BC pretína úsečky AB a AC postupne v bodoch D a E, kde $D \neq B$ a $E \neq C$. Predpokladajme, že sa úsečky BE a CD pretínajú na kružnici k. Určte všetky možné veľkosti uhla BAC.

(Anastasia Bredichina, Patrik Bak)

Riešenie:

Nech P je priesečník úsečiek BE a CD. Podľa vety o obvodových uhloch bod P leží na kružnici k práve vtedy, keď $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BIC|$. Vyjadríme preto veľkosť oboch týchto uhlov pomocou veľkostí uhlov trojuholníka ABC.

Z trojuholníka BIC máme

$$|\sphericalangle BIC| = 180° - |\sphericalangle CBI| - |\sphericalangle ICB| = 180° - \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| - \frac{1}{2}|\sphericalangle BCA| = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle CAB|.$$

Obraz kružnice k v osovej súmernosti podľa priamky BC označíme l a obraz bodu I označíme J. Z osovej súmernosti platí $|\sphericalangle BIC| = |\sphericalangle BJC|$. Podľa zadania na kružnici l ležia aj body D a E, no ležia v opačnej polrovine určenej priamkou BC ako bod J. Preto z vety o obvodových uhloch máme

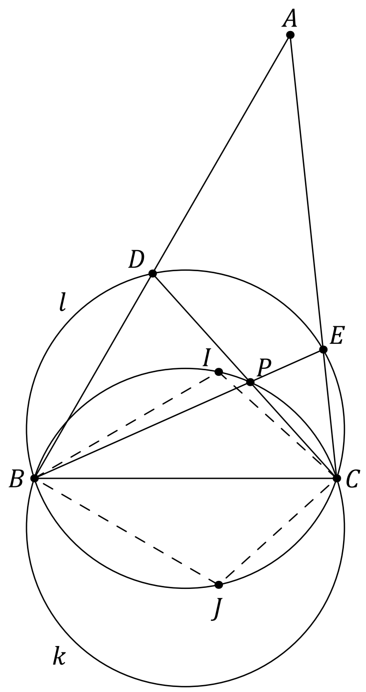
$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BEC| = 180° - |\sphericalangle BJC| = 180° - |\sphericalangle BIC| = 90° - \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|.$$

Vďaka susedným uhlom máme

$$|\sphericalangle PDA| = 180° - |\sphericalangle BDC| = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$$

a analogicky $|\sphericalangle PEA| = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$. Vďaka vrcholovým uhlom $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle EPD|$. Veľkosť uhla EPD určíme zo štvoruholníka $ADPE$:

$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle EPD| = 360° - (|\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle AEP| + |\sphericalangle PDA|)$$
$$= 360° - \left(|\sphericalangle BAC| + 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|\right) = 180° - 2|\sphericalangle BAC|.$$



Keďže body P a I ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou BC, bod P leží na kružnici k práve vtedy, keď

$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BIC|,$$

t. j.

$$180° - 2|\sphericalangle BAC| = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|,$$

$$\frac{5}{2}\,|\sphericalangle BAC| = 90^\circ,$$
$$|\sphericalangle BAC| = 36^\circ.$$

Jediná možná veľkosť uhla BAC je tak 36°.

Komentár:

Vzťah $|\sphericalangle BDC| = 90^\circ - \frac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC|$ možno odvodiť aj nasledovne. Uhly BIC a BDC sú obvodovými uhlami zhodných kružníc (k a l) nad spoločnou tetivou BC, pričom uhol BIC je tupý, a prislúcha tak kratšiemu oblúku a uhol BDC prislúcha z osovej symetrie dlhšiemu oblúku. Preto $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - |\sphericalangle BIC|$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky z vyššie popísaného postupu nasledovne:

- A1 Uvedenie vzťahu $|\sphericalangle BIC| = 90^\circ + \frac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC|$ (absenciu jeho odvodenia tolerujte): 1 bod.
- A2 Odvodenie vzťahu $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - |\sphericalangle BIC|$: 1 bod.
- A3 Odvodenie vzťahu $|\sphericalangle BIC| = |\sphericalangle BPC|$: 1 bod.
- A4 Zostavenie rovnice, z ktorej možno určiť $|\sphericalangle BAC|$: 2 body.
- A5 Uvedenie správneho výsledku (aj keď je len uhádnutý): 1 bod.

Počet bodov za krok Ai označíme a_i.

Celkovo potom za neúplné riešenia udeľte $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ bodov. Body za A1, A2 a A3 udeľte aj v prípade, keď nie sú v riešení explicitne spomenuté, no priamo vyplývajú z vyjadrení veľkostí uhlov, resp. keď je v riešení odvodený ekvivalentný vzťah.

Tolerujte, ak v riešení nie je overené, že hodnota 36° je dosiahnuteľná, teda že pre ňu existuje trojuholník vyhovujúci zadaniu. (V riešení sme to ukázali starostlivou formuláciou všetkých úvah pomocou ekvivalencií.)

---

4 Nájdite všetky kladné prirodzené čísla n také, že čísla

$$\frac{1}{n} \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{n + 23^2}$$

majú nekonečné desatinné rozvoje, ktoré sa zhodujú od niektorého miesta rovnakého pre obe čísla.

(Ján Mazák, Josef Tkadlec)

Riešenie:

Zápisy čísel $1/n$ a $1/\left(n + 23^2\right)$ sa od nejakého miesta zhodujú, preto ich rozdiel $\frac{23^2}{n(n+23^2)}$ má konečný desatinný rozvoj. To nastane práve vtedy, keď v jeho základnom tvare budú v prvočíselnom rozklade menovateľa len 2 a 5. Pri úprave na základný tvar sa teda všetky ostatné prvočísla musia vykrátiť. Keďže menovateľ je deliteľný n, musí byť deliteľný aj každým prvočíslom, ktoré delí n. Keďže $1/n$ má nekonečný rozvoj, nejaké prvočíslo iné ako 2 a 5 delí n. Označme p ľubovoľné z takýchto prvočísel. Keďže p sa v skúmanom zlomku vykráti, musí deliť aj čitateľa 23^2, preto $p = 23$. Zároveň 23^2 už nemôže deliť n, inak by sa v rozklade menovateľa skúmaného zlomku na prvočísla vyskytovalo 23^4 (keďže by platilo $23^2 \mid n + 23^2$), čo by nešlo úplne vykrátiť. Preto $n = 23 \cdot 2^a \cdot 5^b$ pre nejaké prirodzené čísla a a b.

Po dosadení a krátení dostaneme

$$\frac{23^2}{n\,(n + 23^2)} = \frac{23^2}{23 \cdot 2^a \cdot 5^b\,(23 \cdot 2^a \cdot 5^b + 23^2)} = \frac{1}{2^a \cdot 5^b\,(2^a \cdot 5^b + 23)}.$$

Keďže ide o zlomok v základom tvare, jeho menovateľ môže obsahovať vo svojom prvočíselnom rozklade len prvočísla 2 a 5. Preto pre nejaké prirodzené čísla c a d musí platiť

$$2^a \cdot 5^b + 23 = 2^c \cdot 5^d.$$

Keďže 23 nie je deliteľné 2, jedno z čísel a a c musí byť 0, a keďže nie je deliteľné 5, jedno z čísel b a d musí byť 0. Prípad $c = d = 0$ nemôže nastať, keďže ľavá strana je väčšia ako 1. Takisto $a = b = 0$ nemôže platiť, keďže $1 + 23 = 24$, čo je deliteľné 3. Ostávajú tak dva prípady: $a = d = 0$ a $b = c = 0$, pričom zvyšné dve premenné musia byť kladné.

Rozoberme prípady:

- Nech $b = c = 0$.
  Hľadáme teda kladné prirodzené čísla a a d také, že $2^a + 23 = 5^d$. Rozoberme prípady:

- Ak $a = 1$, tak $d = 2$, a teda $n = 23 \cdot 2 = 46$.
- Ak $a \geq 2$, tak má ľavá strana po delení 4 zvyšok 3. Pravá strana má po delení 4 zvyšok rovnaký ako 1^d, t. j. 1, čo je spor.
Riešenie preto v tomto prípade neexistuje.

- Nech $a = d = 0$.
Ukážeme, že rovnica $5^b + 23 = 2^c$ nemá v kladných celých prirodzených riešenie: Určíme, aké zvyšky po delení 15 môžeme na stranách rovnice dostať. Mocniny 2^c pre c z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dávajú v tomto poradí zvyšky 2, 4, 8, 1, 2. Každý ďalší zvyšok vieme získať prenásobením predošlého zvyšku 2 a prípadným odčítaním násobku 15. Keď sa teda zopakoval zvyšok 2, tak zvyšky ďalších mocnín sa budú opakovať vo vzore 2, 4, 8, 1. Analogicky na ľavej strane zistíme, že 5^d má zvyšok 5 alebo 10, teda zvyšok ľavej strany je 13 alebo 3. Zvyšky ľavej a pravej strany po delení 15 sú rôzne, takže v tomto prípade neexistuje riešenie.

Jediným riešením je tak číslo 46. Vtedy rozdiel zlomkov zo zadania je 1/50 čiže 0,02, čo má konečný desatinný rozvoj.

Komentár:

Pri dôkaze, že rovnica $5^b + 23 = 2^c$ nemá riešenie v kladných prirodzených číslach, je možné analogicky využiť aj zvyšky po delení iným číslom. Okrem čísla 15 vyhovujú napríklad aj 31, 39, 63, 69 či ich násobky. Ak využijeme, že $2^c \geq 5$, t. j. $c \geq 5$, tak vyhovuje aj 24.

Komentár:

Úvahu o deliteľnosti 15 je možné nahradiť úvahami o deliteľnosti 5 a 3. Hľadané c musí spĺňať podmienku $5 \mid 2^c - 23$ a postupným preverením c z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ zistíme, že $c = 4k + 3$ pre prirodzené číslo k (ďalej sa zvyšky periodicky opakujú). Po dosadení do skúmanej rovnice tak $5^b + 23 = 16^k \cdot 8$. Po delení 3 dáva 16^k vždy zvyšok 1, preto pravá strana dáva zvyšok 2. Lenže aj 23 dáva zvyšok 2, preto by 5^b muselo byť deliteľné 3, čo by bol spor.

Komentár:

Presné desatinné zápisy nájdených zlomkov 1/46 a 1/575 sú

$$0{,}02\overline{1739130434782608695652}, \text{ resp. } 0{,}00\overline{1739130434782608695652}$$

(rovnaké periódy majú dĺžku 22).

Komentár:

Uvedieme ešte jeden spôsob, ako dokázať, že rovnica $5^b + 23 = 2^c$ nemá v kladných prirodzených číslach riešenie. Keďže ľavá strana je väčšia ako 23, platí $c \geq 5$. Rovnicu upravíme na

$$5^b - 1 = 2^c - 24,$$

$$4(5^{b-1} + 5^{b-2} + \cdots + 5 + 1) = 8(2^{c-3} - 3).$$

Pravá strana je deliteľná 8, preto výraz v zátvorke na ľavej strane je párny. Keďže obsahuje súčet b nepárnych čísel, b je párne. Vtedy vieme túto rovnicu rozložiť takto:

$$\left(5^{\frac{b}{2}} - 1\right)\left(5^{\frac{b}{2}} + 1\right) = 8\left(2^{c-3} - 3\right).$$

Z troch za sebou idúcich čísel $5^{\frac{b}{2}} - 1$, $5^{\frac{b}{2}}$, $5^{\frac{b}{2}} + 1$ je jedno deliteľné 3, pričom číslo $5^{\frac{b}{2}}$ to nie je. Preto je ľavá strana deliteľná 3, avšak pravá strana 3 deliteľná nie je.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky z vyššie popísaného postupu nasledovne:

A1 Vyjadrenie rozdielu zlomkov zo zadania v podobe jedného zlomku a konštatovanie, že musí mať konečný desatinný rozvoj: 1 bod.

A2 Dôkaz, že n je deliteľné 23: 1 bod.

A3 Dôkaz, že hľadané n musí byť v tvare $23 \cdot 2^a \cdot 5^b$: 2 body.

A4 Redukcia na rovnicu $2^a \cdot 5^b + 23 = 2^c \cdot 5^d$ a zdôvodnenie, že ju stačí riešiť pre prípady $a = d = 0$ a $b = c = 0$: 3 body.

A5 Dôkaz, že rovnica $2^a + 23 = 5^d$ má jediné riešenie $(1, 2)$ (a vtedy $n = 46$): 1 bod.

A6 Dôkaz, že rovnica $5^b + 23 = 2^c$ nemá riešenie v kladných prirodzených číslach: 2 body.

Počet bodov za krok Ai označíme a_i.

Celkovo potom za neúplné riešenia udeľte $\max\{a_1, a_2, a_3, a_4\} + a_5 + a_6$ bodov.

Tvrdenia o počítaní zvyškov nie je potrebné dokazovať, vrátane známeho faktu, že zvyšky mocnín po delení tým istým číslom sa opakujú. Je teda v poriadku, ak riešiteľ bez podrobnejšieho zdôvodnenia napíše napríklad: „Mocniny čísla 2 dávajú po delení číslom 15 len zvyšky 2, 4, 8, 1.".

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autori z SK MO: Mária Dományová, Ján Mazák
- recenzenti: Jozef Rajník, Stanislav Krajči
- preklad: Peter Novotný
