
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

1 Prirodzené číslo nazveme *pekné*, ak je väčšie ako 7000 a súčin jeho cifier je 252.

Nájdite dve najmenšie pekné čísla.

(Iveta Jančígová)

Riešenie:

Jednociferné delitele čísla 252 sú 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, takže v zápise akýchkoľvek pekných čísel sa môžu nachádzať len tieto cifry.

Skúsme nájsť dve najmenšie pekné čísla v tvare $71**$, kde cifry na miestach hviezdičiek môžu byť len niektoré z vyššie uvedených deliteľov. Vieme, že $252 : 7 = 36$, teda súčin zostávajúcich dvoch cifier musí byť 36. Cifry na miestach hviezdičiek preto môžu byť len 4 a 9 alebo 6 a 6 alebo 9 a 4.

Dve najmenšie pekné čísla sú teda 7149 a 7166.

Hodnotenie:

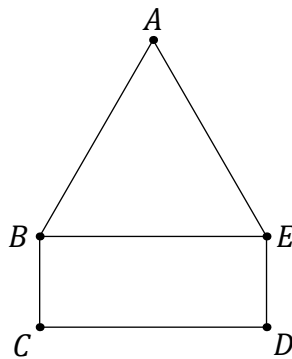
2 body za jednociferné delitele čísla 252; 2 body za rozbor možností, príp. úplnosť skúšania; po 1 bode za každé z hľadaných čísel.

Pri vynechaní deliteľa 1 vychádzajú najmenšie dve čísla 7229 a 7236. Takéto riešenie hodnotíte najviac 3 bodmi podľa kvality komentára.

2 Cestičky medzi úkrytmi cvrčkov Adama, Borisa, Cyrila, Daniela a Erika tvoria sieť ako na obrázku a ich úkryty sú označené prvými písmenami ich mien. Pritom platí:

- Cestičky medzi úkrytmi Adama, Borisa a Erika tvoria rovnostranný trojuholník.
- Cestičky medzi úkrytmi Borisa, Cyrila, Daniela a Erika tvoria obdĺžnik s obsahom 360 dm^2 .
- Prechádzka po cestičkách od Adama k Borisovi, Cyrilovi, Danielovi, Erikovi a Adamovi je o 24 dm dlhšia ako prechádzka od Adama k Borisovi, Erikovi a Adamovi.

Aká dlhá je cestička medzi úkrytmi Adama a Erika?



(Erika Novotná)

Riešenie:

Štvoruholník $BCDE$ je obdĺžnik, teda jeho protilahlé strany sú zhodné, t. j. $|BE| = |CD|$ a $|BC| = |DE|$. Rozdiel 24 dm dĺžok dvoch popísaných prechádzok zodpovedá dvojnásobku strany BC :

$$24 \text{ dm} = (|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EA|) - (|AB| + |BE| + |EA|) = |BC| + |DE| = 2|BC|.$$

takže $|BC| = 12 \text{ dm}$.

Obsah obdĺžnika $BCDE$ je $|BC| \cdot |BE|$ čiže 360 dm^2 , z čoho $|BE| = 360 \text{ dm} / 12 = 30 \text{ dm}$.

Trojuholník ABE je rovnostranný, takže $|AE| = |BE|$. Cestička medzi úkrytmi Adama a Erika je teda dlhá 30 dm.

Hodnotenie:

2 body za dĺžku strany BC alebo DE ; 2 body za dĺžku druhej strany obdĺžnika; 1 bod za dĺžku strany AE ; 1 bod za kvalitu komentára.

3 Jakub prečítal knihu počas troch dní. V utorok prečítal tretinu všetkých strán, v stredu prečítal tri sedminy zvyšných strán a posledných 32 strán prečítal vo štvrtok.

Koľko strán mala kniha?

(Erika Novotná)

Riešenie 1:

V utorok Jakub prečítal $\frac{1}{3}$ všetkých strán, zostávalo mu teda $1 - \frac{1}{3}$ čiže $\frac{2}{3}$ všetkých strán.

V stredu prečítal $\frac{3}{7}$ zvyšných strán, t. j. $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3}$ čiže $\frac{2}{7}$ všetkých strán, zostávalo mu teda $\frac{2}{3} - \frac{2}{7}$ čiže $\frac{8}{21}$ všetkých strán.

Vo štvrtok prečítal všetky zostávajúce strany ktorých bolo 32, takže kniha mala $\frac{21}{8} \cdot 32$ čiže 84 strán.

Riešenie 2:

Skúmame počty prečítaných strán od posledného dňa. Vieme, že 32 strán, ktoré Jakub prečítal vo štvrtok, je počet strán, ktoré mu zostali zo stredy. To zodpovedá $1 - \frac{3}{7}$ čiže $\frac{4}{7}$ strán, ktoré mal na čítanie v stredu. Týchto 32 strán sú teda $\frac{4}{7}$ všetkých strán zo stredy, takže $\frac{1}{7}$ z tohto počtu je 8 strán. Teda v stredu mu zostalo na čítanie $7 \cdot 8$ čiže 56 strán.

56 strán, ktoré mal Jakub na čítanie v stredu, je počet strán, ktoré mu zostali z utoroka. To zodpovedá $1 - \frac{1}{3}$ čiže $\frac{2}{3}$ strán, ktoré mal na čítanie v utorok. Týchto 56 strán sú teda $\frac{2}{3}$ všetkých strán, takže $\frac{1}{3}$ všetkých strán knihy je 28 strán. Kniha mala teda dokopy $3 \cdot 26$ čiže 84 strán.

Poznámka:

Počet strán prečítaných v utorok, resp. v stredu je vyjadrený pomocou tretín, resp. sedmín a obdobne je vyjadrený počet zvyšných strán v jednotlivých dňoch. Na štvrtok pripadlo 32 strán. Najmenšie číslo, ktoré je násobkom 3 a 7, je 21. Pre násobky 21 väčšie ako 32 je možné postupne dopĺňať, koľko strán Jakub prečítal, koľko strán zostalo, a overiť, či na štvrtok vychádza 32 strán. Pre knihu so 42, resp. so 63 stranami na štvrtok vychádza 16, resp. 24 strán, čo je málo. Pre knihu s 84 stranami na štvrtok vychádza 32 strán:

deň	na prečítanie	prečítal	zostalo
utorok	84	28	56
streda	56	24	32
štvrtok	32	32	0

Väčšie čísla ako 84 nemá zmysel skúšať, lebo potom by počet strán zostávajúcich na prečítanie vo štvrtok bol väčší.

Hodnotenie:

V prípade prvého riešenia: 1 bod za vyjadrenie počtu zostávajúcich strán vo štvrtok, 2 body za vyjadrenie počtu zostávajúcich strán v stredu, 1 bod za sformulovanie rovnice, 2 body za výsledok

V prípade druhého riešenia: 3 body za dopočítanie strán zo stredy, 2 body za dopočítanie strán z utoroka, 1 bod za kvalitu komentára.

Vyššie uvedená tabuľka bez ďalšieho komentára má hodnotu 3 bodov.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - autorky z SK MO: Iveta Jančígová, Erika Novotná
 - recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančígová, Marián Macko, Stanislav Krajčí
 - preklad: Erika Novotná