MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

1 Mamička si nachystala perníčky na zdobenie. Každý perníček zdobí rovnako dlho. Keby pri zdobení každého perníčka bola o jednu minútu rýchlejšia, mohla by skončiť o 48 minút skôr alebo by v takto ušetrenom čase mohla ozdobiť (v novom zrýchlenom tempe) presne 12 ďalších perníčkov.

Koľko perníčkov si mamička nachystala a ako dlho jej bude trvať ich zdobenie (v pôvodnom nezrýchlenom tempe)?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

O jednu minútu rýchlejšie zdobenie každého perníčka by viedlo k celkovej úspore 48 minút. Mamička si teda na zdobenie nachystala 48 perníčkov.

V zrýchlenom tempe by za 48 minút ozdobila 12 perníčkov, takže zdobenie jedného perníčka by jej trvalo 48/12 čiže 4 minúty. V pôvodnom tempe jej zdobenie jedného perníčka trvá $4 + 1$ čiže 5 minút, teda zdobenie 48 perníčkov bude trvať $48 \cdot 5$ čiže 240 minút.

Hodnotenie:

2 body za celkový počet perníčkov; 1 bod za čas zdobenia v zrýchlenom tempe; 1 bod za čas zdobenia v pôvodnom tempe; 2 body za celkový čas zdobenia.

2 V útulku je 60 zvierat, a to výhradne mačky a psy. Tretina mačiek a tri osminy psov nie sú ani rok staré, 39 zvierat má rok alebo viac.

Koľko je v útulku mačiek a koľko psov?

(Lenka Dedková)

Riešenie:

Označme počet psov p a počet mačiek m. Keďže počet psov je deliteľný 8, pre násobky 8 neprevyšujúce 60 zistime, aký by bol počet mačiek, a overme ich deliteľnosť 3. V kladnom prípade zistime počet zvierat starých rok alebo viac:

p	8	16	24	32	40	48	56
m čiže $60 - p$	52	44	36	28	20	12	4
m je deliteľné 3	nie	nie	áno	nie	nie	áno	nie
$\frac{2}{3}m + \frac{5}{8}p$			39			38	

Ako vidíme v tabuľke, 39 zvierat starých rok alebo viac vychádza pre hodnoty v treťom stĺpci tabuľky. V útulku je teda 36 mačiek a 24 psov.

Poznámka:

Počty mačiek a psov môžeme vyjadriť vzťahmi $m = 3l$ a $p = 8q$, kde l a q sú kladné prirodzené čísla. Podmienky zo zadania je možné vyjadriť pomocou rovníc

$$3l + 8q = 60,$$

$$2l + 5q = 39.$$

Podobným spôsobom ako vyššie je možné určiť riešenie každej rovnice. Pre kladné q vyjadríme $60 - 8q$, resp. $39 - 5q$, overíme deliteľnosť 3, resp. 2 a v kladnom prípade určíme l:

$$l = \frac{60 - 8q}{3},$$

resp.

$$l = \frac{39 - 5q}{2}.$$

Jediná dvojica (q, l) vyhovujúca obom podmienkam je $(3, 12)$, z čoho $p = 24$ a $m = 36$.

Poznámka:

K tomu istému výsledku je možné dospieť porovnaním oboch vzťahov pre l:

$$\frac{60-8q}{3}=\frac{39-5q}{2},$$

$$120-16q=117-15q,$$

$$3=q.$$

Dosadením do $l=\frac{60-8q}{3}$ máme $l=12$.

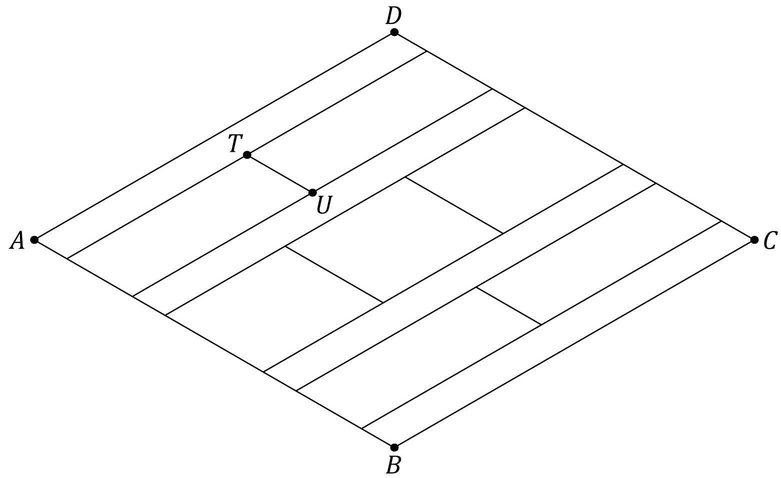
Hodnotenie:

2 body za postrehy s deliteľnosťou 3 a 8, prípadne formuláciu pomocou rovníc; 2 body za dôsledné skúšanie možností, prípadne riešenie rovníc; 2 body za výsledok.

---

3 Kosoštvorec $ABCD$ je zložený z rovnobežníkov s navzájom rovnakými obsahmi. Vyznačená spoločná strana TU dvoch rovnobežníkov má dĺžku 2 cm.

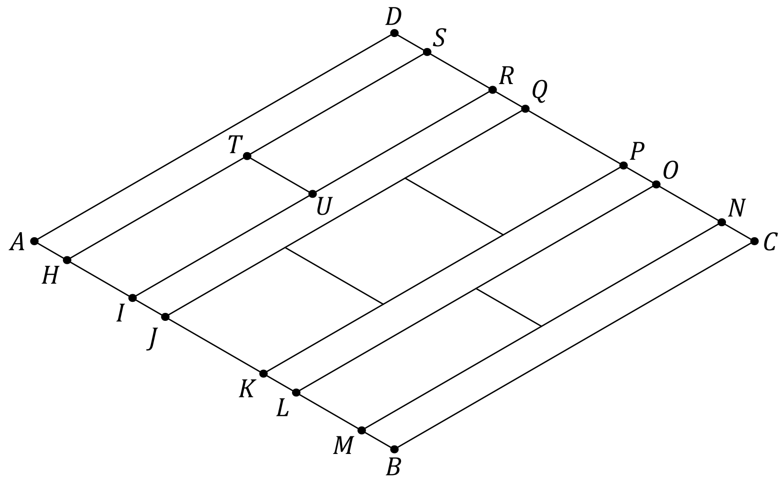
Určte obvod kosoštvorca $ABCD$.



(Karel Pazourek)

Riešenie:

Všetky rovnobežníky majú navzájom zhodné uhly. Porovnávanie obsahov preto vedie k porovnávaniu dĺžok ich strán. Kvôli ľahšiemu vyjadrovaniu si vrcholy rovnobežníkov označíme:



Rovnobežník $HIRS$ je rozdelený na dva rovnakoploché, a preto zhodné rovnobežníky. Každý z nich má rovnaký obsah ako rovnobežník $AHSD$, s ktorým má rovnobežník $HIRS$ spoločnú stranu. Preto je obsah $HIRS$ dvojnásobný vzhľadom k obsahu $AHSD$, takže platí

$$|HI|=|TU|=2\,|AH|,$$

$$|AH|=\frac{1}{2}\,|TU|=1\text{ cm}.$$

Rovnobežníky $AHSD, IJQR, KLOP, MBCN$ majú rovnaké obsahy a dlhšiu stranu rovnakej dĺžky. Preto sú navzájom zhodné, takže platí

$$|AH| = |IJ| = |KL| = |MB| = 1 \text{ cm}.$$

Rovnobežník $JKPQ$ je rozdelený na tri rovnakoploché, a preto zhodné rovnobežníky. Každý z nich má rovnaký obsah ako rovnobežník $IJQR$, s ktorým má rovnobežník $JKPQ$ spoločnú stranu. Preto je obsah $JKPQ$ trojnásobný vzhľadom k obsahu $IJQR$. takže platí

$$|JK| = 3\,|IJ| = 3 \text{ cm}.$$

Podobná úvaha ako v prvom odseku pod obrázkom dáva

$$|LM| = |HI| = 2 \text{ cm}.$$

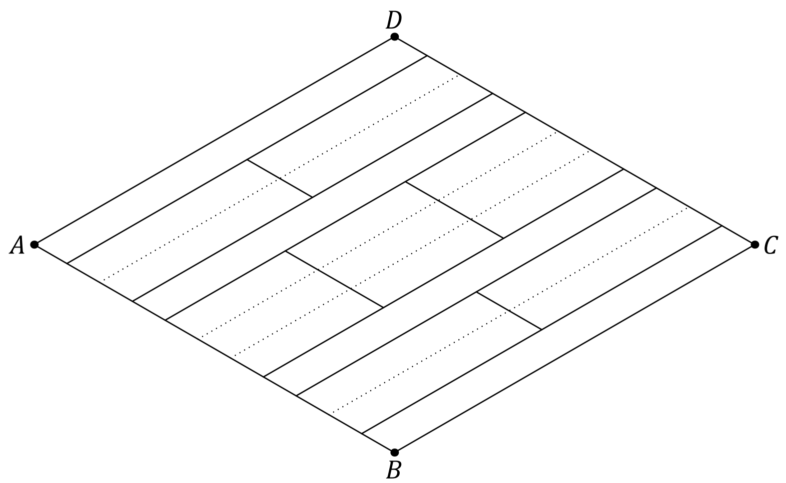
Platí teda

$$|AB| = |AH| + |HI| + |IJ| + |JK| + |KL| + |LM| + |MB| = 4\,|AH| + 2\,|HI| + |JK| = 11 \text{ cm},$$

a teda obvod kosoštvorca $ABCD$ je $4 \cdot 11$ cm, t. j. 44 cm.

Poznámka:

Znázornenie pomerov medzi stranami menších rovnobežníkov môže vyzerať takto (najmenšie úsečky na stranách AB, resp. CD sú navzájom zhodné):



Hodnotenie:

2 body za určenie dĺžky 1 cm ktoréhokoľvek z úsekov zhodného s AH; 1 bod za určenie dĺžky 2 cm ktoréhokoľvek z úsekov zhodného s HI; 2 body za určenie dĺžky 3 cm úseku JK alebo QP; 1 bod za prenesenie všetkých dĺžok na stranu AB, resp. DC a obvod kosoštvorca.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančigová, Marián Macko, Stanislav Krajči
- preklad: Erika Novotná