
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

- 1 Kúzelníkov povraz je dlhší ako 10 m. Nech by rozdelil povraz na dve časti v hociktorom z troch pomerov 3 : 5, 7 : 11, 13 : 17, boli by dĺžky oboch častí vyjadrené v centimetroch zakaždým prirodzeným číslom. Aká je najmenšia možná dĺžka kúzelníkovho povrazu?

(V. Dedek)

Riešenie:

Celkový počet dielov pri jednotlivých pomeroch je 8, 18, 30, takže dĺžka povrazu v centimetroch musí byť násobkom každého z týchto čísel.

Najmenší spoločný násobok čísel 8, 18, 30 je 360. Ďalšie násobky 360 sú 720, 1080 atď.

Najmenšia možná dĺžka povrazu je 1080 cm.

Poznámka:

Namiesto najmenšieho spoločného násobku daných čísel je možné postupne hľadať násobky napr. čísla 30 väčšie ako 1000 a overovať ich deliteľnosť zvyšnými dvomi číslami 8 a 18. Najmenšie také číslo je 1080.

Hodnotenie:

2 body za možnú dĺžku povrazu ako násobok čísel 8, 18 a 30; 2 body za najmenší spoločný násobok týchto čísel alebo analogický postup; 2 body za výsledok.

- 2 Monika si vybrala dve čísla, aby preskúšala schopnosti robota Popletu. Najprv mu dala sčítať obe čísla. Popletov výsledok bol o 4,1 menší ako výsledok pri správnom sčítaní. Potom mu dala sčítať trojnásobok prvého čísla s druhým číslom. Teraz bol Popletov výsledok o 8,4 menší ako výsledok pri správnom sčítaní. Čoskoro zistila, že Popleta nepočíta súčet dvoch zadaných čísel, ale správne vypočíta ich aritmetický priemer.

Ktoré čísla si Monika vybrala?

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Označme prvé Monikino číslo a a druhé b , potom podľa zadania platí

$$\frac{a + b}{2} = 4,1,$$

$$\frac{3a + b}{2} = 8,4,$$

t. j.

$$a + b = 8,2,$$

$$3a + b = 16,8.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame

$$(3a + b) - (a + b) = 16,8 - 8,2,$$

$$2a = 8,6,$$

$$a = 4,3,$$

čo po dosadení napríklad do rovnice $a + b = 8,2$ dáva

$$4,3 + b = 8,2,$$

$$b = 3,9.$$

Vtedy naozaj

$$\frac{a + b}{2} = \frac{4,3 + 3,9}{2} = \frac{8,2}{2} = 4,1,$$

a

$$\frac{3a + b}{2} = \frac{3 \cdot 4,3 + 3,9}{2} = \frac{12,9 + 3,9}{2} = \frac{16,9}{2} = 8,4.$$

Monika si teda vybrala čísla 4,3 a 3,9.

Hodnotenie:

2 body za vyjadrenie pomocou neznámych; 2 body za úpravy; 2 body za výsledok.

3 V trojuholníku ABC leží bod D na strane BC a bod E na strane AC tak, že platí

$$|AB| = |BE| = |EC| = |CD|,$$

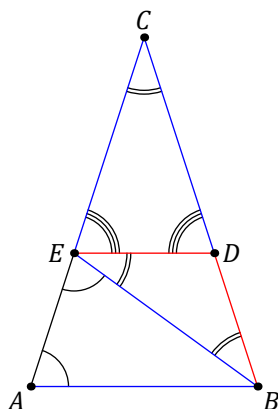
$$|BD| = |DE|.$$

Určte veľkosti uhlov ACB a BAD .

(Patrik Bak)

Riešenie:

Vďaka zhodnosti úsečiek je v útvere niekoľko rovnoramenných trojuholníkov. V každom rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni zhodné.



Platí preto

$$|\sphericalangle CDE| = 180^\circ - |\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle DBE| + |\sphericalangle DEB| = 2 |\sphericalangle DBE| = 2 |\sphericalangle CBE| = 2 |\sphericalangle BCE| = 2 |\sphericalangle DCE|,$$

takže z trojuholníka CDE

$$\begin{aligned} 180^\circ &= |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CED| + |\sphericalangle DCE| = 2 |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle DCE| \\ &= 2 \cdot 2 |\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle DCE| = 4 |\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle DCE| = 5 |\sphericalangle DCE|, \end{aligned}$$

a teda

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle DCE| = 36^\circ.$$

Z toho

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CAB| &= |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle AEB| = 180^\circ - |\sphericalangle BED| - |\sphericalangle DEC| = 180^\circ - |\sphericalangle EBD| - |\sphericalangle CDE| \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle DCE| - 2 |\sphericalangle DCE| = 180^\circ - 3 |\sphericalangle DCE| = 180^\circ - 3 \cdot 36^\circ = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ. \end{aligned}$$

Napokon z trojuholníka ABC

$$|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Trojuholník ABC je teda rovnoramenný so základňou AB .

Keďže aj EDC je rovnoramenný so základňou ED , takže body E a D sú súmerné podľa osi úsečky AB . Preto sú uhly BAD a ABE zhodné, takže

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABE| = 180^\circ - |\sphericalangle EAB| - |\sphericalangle AEB| = 180^\circ - 2 |\sphericalangle EAB| = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

Veľkosti oboch uhlov sú teda 36° .

Hodnotenie:

1 bod za úvodný rozbor a rozpoznanie zhodných uhlov; 2 body za veľkosť uhla ACB ; 1 bod za zdôvodnenie rovnoramennosti trojuholníka ABC ; 1 bod za veľkosť uhla BAD ; 1 bod za kvalitu komentára.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančígová, Marián Macko, Stanislav Krajčí
 - preklad: Erika Novotná