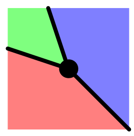
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Zadania úloh domáceho kola kategórie A

1 Ostrov je rozdelený na niekoľko kráľovstiev. Územie každého kráľovstva je konvexný mnohouholník, ktorý má práve jeden najsevernejší, najjužnejší, najvýchodnejší aj najzápadnejší bod. Každý kráľ dostal 4 vlajky s písmenami S, J, V, Z, ktoré umiestnil do týchto významných bodov svojho kráľovstva. (Napríklad v mieste stretnutia troch štátov na obrázku sú takto zapichnuté 2 vlajky kráľovstva označeného zelenou farbou, a to J a V, ale nie je tam žiadna vlajka zvyšných dvoch kráľovstiev.) Uprostred ostrova je krtinec, kde sa stretáva 7 kráľovstiev. Určte všetky možné počty vlajok zapichnutých do krtinca.



(Josef Tkadlec)

2 Nech p a q sú reálne čísla také, že rovnici

$$\left|x^2 - 1\right| = px + q$$

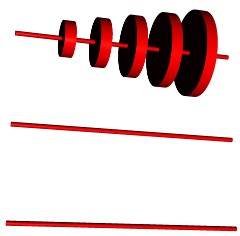
s neznámou x vyhovujú práve 4 navzájom rôzne reálne čísla.

a) Určte všetky možné hodnoty súčtu týchto 4 čísel.

b) Dokážte, že súčin týchto 4 čísel leží v intervale $(-3, 1)$.

(Patrik Bak)

3 Hlavolam sa skladá z troch vodorovných tyčí a z n, kde $n \geq 2$, rôzne veľkých kotúčov zoradených na prvej tyči podľa veľkosti. V jednom ťahu vysunieme z ľubovoľnej tyče krajný kotúč (zľava alebo sprava) a nasunieme ho na inú tyč z tej istej strany. Hlavolam je vyriešený, keď sa všetky kotúče nachádzajú na druhej tyči zoradené rovnako ako na začiatku. V závislosti od n určte najmenší možný počet ťahov, ktorý je potrebný na vyriešenie hlavolamu.



(Jozef Rajník)

4 Nech a a b sú nesúdeliteľné prirodzené čísla také, že aj čísla $a^3 - 1$ a $b^3 - 1$ sú nesúdeliteľné. Dokážte, že čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ sú tiež nesúdeliteľné.

(Patrik Bak)

5 Vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC je daný bod R. Na stranách AB a BC ležia postupne body P a Q tak, že obvod trojuholníka PQR je najmenší možný. Podobne na stranách BC a AC ležia postupne body S a T tak, že obvod trojuholníka RST je najmenší možný. Priamky PQ a ST sa pretínajú v bode K. Nech platí $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAR|$. Dokážte, že trojuholníky PQR a RST majú rovnaký obvod.

(Michal Pecho)

6 Na tabuli sú napísané 4 prirodzené čísla. Vykonávame nasledujúce kroky: zakaždým si vyberieme jedno z čísel na tabuli, zotrieme ho a namiesto neho napíšeme jeho druhú mocninu. Môžeme vždy po konečne veľa krokoch dosiahnuť to, aby rozdiel niektorých dvoch čísel na tabuli bol násobkom 97?

(Josef Tkadlec)

Termín odovzdania riešení: **utorok 2. 12. 2025**

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzenti: Peter Novotný, Stanislav Krajči
- preklad: Peter Novotný