

2024/2025

74. ročník Matematickej olympiády

Zadania úloh MEMO

(Súťaž sa konala 25. – 31. 8. 2025.)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nech $\mathbb{R}^+$ označuje množinu kladných reálnych čísel. Daná je funkcia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokážte, že existuje kladné celé číslo n_0 také, že pre ľubovoľné kladné celé číslo $n \geq n_0$ a pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f^n(x) \geq x.$$

Poznámka. Zápis f^n označuje funkciu f aplikovanú n -krát, čiže

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n\text{-krát}}.$$

(Slovensko, Dominik Martin Rigász)

I-2. Predpokladajme, že v nekonečnej štvorčekovej sieti sú niektoré políčka zafarbené načerveno. Potom *rubínová veža* je figúrka, ktorá sa môže v jednom ťahu posunúť o ľubovoľný počet políčok v jednom smere rovnobežnom s čiarami mriežky (buď vodorovne, alebo zvislo) tak, aby ostala na červených políčkach po celý čas počas ťahu.

Začínajúc s nezafarbenou nekonečnou štvorčekovou sieťou, Alica vykoná nasledovný proces: Najprv zafarbí najviac 2025 políčok načerveno. Potom umiestni niekoľko rubínových veží na po dvoch rôzne červené políčka tak, aby dodržala nasledovné podmienky:

- Žiadna rubínová veža sa nevie dostať jedným ťahom na políčko, kde stojí iná rubínová veža.
- Každá rubínová veža sa vie dvomi ťahmi dostať na ľubovoľné políčko, kde stojí iná rubínová veža.

Nájdite najväčší možný počet rubínových veží, ktorý Alica môže umiestniť počas takéhoto procesu. (Švajčiarsko)

I-3. Nech ABC je trojuholník. Jeho vpísaná kružnica ω sa dotýka strán BC , CA a AB postupne v bodoch D , E a F . Body P a Q , rôzne od bodu D , ležia na priamke BC tak, že $|PB| = |BD|$ a $|QC| = |CD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi PCE a QBF a kružnica ω prechádzajú spoločným bodom. (Rakúsko)

I-4. Podmnožinu S množiny celých čísel nazvime *saskou*, ak pre ľubovoľné tri po dvoch rôzne prvky $a, b, c \in S$ je číslo $ab + c$ druhou mocninou nejakého celého čísla. Dokážte, že každá saská množina je konečná. Ďalej určte najväčší možný počet prvkov, ktoré saská množina môže obsahovať. (Chorvátsko)

Súťaž družstiev:

T-1. Bob vlastní n mincí s celočíselnými hodnotami

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0.$$

Teraz stojí pred automatom na sladkosti, ktorý ponúka na predaj n kusov maškrt s celočíselnými cenami $b_1, b_2, \dots, b_n$. Bob si všimol, že pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

Navyše, celková hodnota Bobových mincí je rovnaká ako celková cena všetkých maškrt. Bob si môže maškrtu kupovať v ľubovoľnom poradí. Na to, aby si kúpil i -tu maškrtu, musí do automatu vhodiť mince v celkovej hodnote aspoň b_i . Po zakúpení však automat Bobovi nevráti žiadny výdavok.

Dokážte, že Bob si môže kúpiť aspoň polovicu všetkých maškrt.

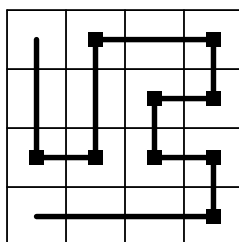
(Česká republika)

T-2. Nech $\mathbb{R}^+$ označuje množinu kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre každé $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y),$$

a pre ktoré existuje najviac jedno číslo $a \in \mathbb{R}^+$ také, že $f(a) = 1$. (Ukrajina)

T-3. V tabuľke $n \times n$ nazvime *hadom* lomenú čiaru, ktorá spája stredy susedných políčok a prechádza stredmi všetkých n^2 políčok, pričom každý stred navštívi práve raz. Dve políčka pritom považujeme za susedné, ak majú spoločnú stranu. Všimnite si, že všetky rovné úseky hada sú rovnobežné so stranami tabuľky. Na obr.1 je zobrazený príklad hada v tabuľke 4×4 . Tento had deväťkrát zabočí o 90° , pričom tieto zabočenia sú naznačené malým čiernym štvorčekom.



Obr. 1

Uvažujme teraz hada, ktorý prechádza všetkými 2025 políčkami tabuľky 45×45 . Aký je najväčší možný počet zabočení o 90° , ktoré takýto had môže spraviť?

(Česká republika)

T-4. Nech n je kladné celé číslo. V provincii Tramtária je $100n$ miest, z ktorých každé dve sú spojené priamou cestou. Každá z týchto ciest má mýtnicu, ktorá vyberá kladnú sumu mýtného. Pre každú cestu sa príjem jej mýtnice rovnomerne rozdelí medzi dve

mestá na koncoch cesty (teda každé z týchto dvoch miest dostane polovicu mýta). Celkový príjem mesta je rovný súčtu príjmov, ktoré toto mesto získava zo $100n - 1$ mýtnic na svojich cestách.

Podľa nového zákona získa príjmy niektorých mýtnic federálna vláda namiesto miest prislúchajúcich týmto mýtniciam. Guvernér Tramtárie rozhoduje o tom, o ktoré mýtnice pôjde. Primátori miest požadujú, aby po tejto zmene každému mestu zostal celkový príjem vo výške aspoň 99 % jeho pôvodného celkového príjmu.

V závislosti od n nájdite najväčšie kladné celé číslo k také, že guvernér vie vždy vybrať k mýtnic, z ktorých bude federálna vláda získavať príjem, pričom uspokojí požiadavky primátorov miest. (Litva)

T-5. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC , v ktorom platí $|AB| < |AC|$. Označme D päť kolmice z bodu A na priamku BC . Nech E je taký bod, že štvoruholník $ABEC$ je rovnobežník. Ďalej nech M je taký bod vo vnútri trojuholníka ABC , že platí $|MB| = |MC|$. Napokon označme F obraz bodu D v osovej súmernosti podľa dotýčnice ku kružnici opísanej trojuholníku ADM prechádzajúcej bodom M . Dokážte, že $|AF| = |DE|$. (Slovensko, Patrik Bak)

T-6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC , vo vnútri ktorého je zvolený bod D taký, že preň platí $|\angle BDC| = 180^\circ - |\angle BAC|$. Priamka BD pretína priamku AC v bode E a priamka CD pretína priamku AB v bode F . Body $P \neq E$ a $Q \neq F$ sú zvolené na priamke EF tak, že platí $|BP| = |BE|$ a $|CQ| = |CF|$. Predpokladajme, že úsečky AP a AQ pretínajú kružnicu ω opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch $R \neq A$ a $S \neq A$. Dokážte, že priamky RF a SE sa pretínajú na kružnici ω . (Slovensko, Patrik Bak)

T-7. Nech n je kladné celé číslo také, že *súčet* všetkých kladných deliteľov čísla $n^2 + n + 1$ je deliteľný tromi. Dokážte, že množinu všetkých kladných deliteľov čísla $n^2 + n + 1$ je možné rozložiť na tri množiny tak, že *súčin* prvkov každej množiny je rovnaký. (Slovensko, Jakub Krivošík)

T-8. Rozhodnite, či je nasledujúce tvrdenie splnené pre ľubovoľný polynóm P stupňa aspoň 2 a s nezápornými celočíselnými koeficientmi: Existuje kladné celé číslo m také, že pre nekonečne veľa kladných celých čísel n má číslo $P^n(m)$ viac ako n rôznych kladných deliteľov.

Poznámka. Zápis P^n označuje P aplikované n -krát, čiže $P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{n\text{-krát}}$. (Litva)