

2023/2024

73. ročník Matematickej olympiády

Zadania úloh IMO

(Súťaž sa konala 15. – 20. 7. 2024.)

1. Určte všetky reálne čísla α také, že pre každé kladné celé číslo n je celé číslo

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

násobkom n . (Zápisom $\lfloor z \rfloor$ označujeme najväčšie celé číslo neprevyšujúce z . Napríklad $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ a $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.) (Kolumbia)

2. Určte všetky dvojice kladných celých čísel (a, b) , pre ktoré existujú kladné celé čísla g a N také, že

$$\text{nsd}(a^n + b, b^n + a) = g$$

platí pre všetky celé čísla $n \geq N$. (Zápisom $\text{nsd}(x, y)$ označujeme najväčšieho spoločného deliteľa celých čísel x a y .) (Indonézia)

3. Nech a_1, a_2, a_3, \dots je nekonečná postupnosť kladných celých čísel a nech N je kladné celé číslo. Predpokladajme, že pre každé $n > N$ je a_n rovné počtu výskytov čísla a_{n-1} medzi číslami a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Dokážte, že aspoň jedna z postupností a_1, a_3, a_5, \dots a a_2, a_4, a_6, \dots je časom periodická. (Nekonečná postupnosť b_1, b_2, b_3, \dots je časom periodická, ak existujú kladné celé čísla p a M také, že $b_{m+p} = b_m$ pre všetky $m \geq M$.) (Austrália)

4. Nech ABC je trojuholník, v ktorom platí $|AB| < |AC| < |BC|$. Označme ω kružnicu vpísanú do trojuholníka ABC a I jej stred. Nech X je bod na priamke BC rôzny od bodu C taký, že priamka prechádzajúca bodom X rovnobežná s AC sa dotýka ω . Podobne, nech Y je bod na priamke BC rôzny od bodu B taký, že priamka prechádzajúca bodom Y rovnobežná s AB sa dotýka ω . Priamka AI pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC druhýkrát v bode $P \neq A$. Označme K a L postupne stredy strán AC a AB . Dokážte, že $|\angle KIL| + |\angle YPX| = 180^\circ$. (Poľsko)

5. Slimák Turbo hrá hru v tabuľke s 2024 riadkami a 2023 stĺpcami. V 2022 políčkach tabuľky sa schovávajú príšery. Na začiatku Turbo nevie, kde sa príšery nachádzajú, ale vie, že v každom riadku, okrem prvého a posledného sa nachádza práve jedna príšera a v každom stĺpci sa nachádza maximálne jedna príšera.

Turbo robí sériu pokusov, aby sa dostal z prvého riadku do posledného. V každom pokuse začína na ľubovoľnom políčku prvého riadku. Následne sa opakovane posúva do susedného políčka, ktoré zdieľa spoločnú stranu s jeho aktuálnym políčkom. (Turbo sa môže vrátiť do už navštívených políčok.) Ak sa dostane do políčka s príšerou, jeho pokus končí a je premiestnený naspäť do prvého riadku, aby začal nový pokus. Príšery sa nehýbu a Turbo si pamätá, či políčko, ktoré už navštívil, obsahuje príšeru, alebo nie. Ak sa dostane do ľubovoľného políčka v poslednom riadku, jeho pokus končí a tiež aj celá hra.

Určte najmenšiu hodnotu n , pre ktorú má Turbo stratégiu, ktorá zaručí dosiahnutie posledného riadku najneskôr v n -tom pokuse, bez ohľadu na rozmiestnenie príšer. (Hongkong)

6. Nech \mathbb{Q} je množina všetkých racionálnych čísel. Funkcia $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sa nazýva *kúpeľná*, ak má nasledujúcu vlastnosť: Pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}$ platí aspoň jedna z rovností

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{alebo} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokážte, že existuje celé číslo c také, že pre ľubovoľnú kúpeľnú funkciu f existuje najviac c rôznych racionálnych čísel vyjadriteľných v tvare $f(r) + f(-r)$ pre nejaké racionálne číslo r a nájdite najmenšiu možnú hodnotu c . (Japonsko)