1999/2000
49. ročník MO *Zadania úloh československého stretnutia*

(*Súťaž sa konala 7. – 10. 6. 2000.*)

1. Dokážte, že ak kladné reálne čísla a, b, c spĺňajú nerovnosť

$$5abc > a^3 + b^3 + c^3,$$

potom existuje trojuholník s dĺžkami strán a, b, c. (*Bielorusko, MO 98/99*)

2. Daný je trojuholník ABC a jemu vpísaná kružnica k. Kružnice k_a, k_b, k_c pretínajú ortogonálne kružnicu k a úsečky BC, CA, AB sú (v tomto poradí) ich tetivami. Kružnice k_a, k_b sa druhýkrát pretínajú v bode C', kružnice k_c, k_a v bode B' a kružnice k_b, k_c v bode A'. Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku $A'B'C'$ je polovicou polomeru kružnice k.
Poznámka. Hovoríme, že dve kružnice sa pretínajú *ortogonálne*, ak ich dotyčnice v každom spoločnom bode sú navzájom kolmé. (*jury MMO 99*)

3. Nech n je prirodzené číslo. Dokážte, že n je mocninou 2 práve vtedy, keď existuje celé číslo m také, že $2^n - 1$ je deliteľom $m^2 + 9$. (*jury MMO 98*)

4. Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi. Dokážte, že potom polynóm

$$Q(x) = P(x^4)P(x^3)P(x^2)P(x) + 1$$

nemá celočíselný koreň. (*E. Kováč*)

5. Nech $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník so základňami AB a CD. Kružnica vpísaná trojuholníku BCD sa dotýka strany CD v bode E. Nech F je taký bod na osi uhla DAC, že priamky EF a CD sú navzájom kolmé. Kružnica opísaná trojuholníku ACF pretína priamku CD v bodoch C a G. Dokážte, že trojuholník AFG je rovnoramenný.
(*USA, MO 98/99*)

6. Každé celé číslo je ofarbené jednou z farieb červená, modrá, zelená a biela. Nech x a y sú nepárne celé čísla také, že $|x| \neq |y|$. Dokážte, že existujú nejaké dve prirodzené čísla rovnakej farby, ktorých rozdiel nadobúda jednu z hodnôt x, y, $x + y$ alebo $x - y$.
(*jury MMO 99*)