2000/2001
50. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 13. – 16. 6. 2001.*)

1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \geqq 2)$ platí nerovnosť

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\dots(a_n^3+1) \geqq (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\dots(a_n^2a_1+1).$$

(*P. Kaňovský*)

2. Trojuholník ABC má ostré vnútorné uhly pri vrcholoch A a B. Nad stranami AC a BC sú trojuholníku zvonku pripísané rovnoramenné trojuholníky ACD a BCE so základňami AC a BC tak, že $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle ABC|$ a súčasne $|\measuredangle BEC| = |\measuredangle BAC|$. Označme S stred opísanej kružnice trojuholníku ABC. Dokážte, že dĺžka lomenej čiary DSE sa rovná obvodu trojuholníka ABC práve vtedy, keď je uhol ACB pravý! (*J. Šimša*)

3. Pre ľubovoľné prirodzené čísla n, k spĺňajúce podmienky $\frac{1}{2}n < k \leqq \frac{2}{3}n$ nájdite najmenší počet políčok, ktoré môžeme obsadiť na štvorcovej šachovnici $n \times n$ tak, aby v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci šachovnice neexistovalo k voľných (t. j. neobsadených) susedných políčok! (*J. Šimša*)

4. V rovine sú dané body A, B $(A \neq B)$. V tejto rovine uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vlastnosťou: Na jeho stranách BC, CA existujú postupne body D, E, pre ktoré platí

(i) $\dfrac{|BD|}{|BC|} = \dfrac{|CE|}{|CA|} = \dfrac{1}{3}$;

(ii) body A, B, D, E ležia (v tomto poradí) na jednej kružnici.

Určte množinu priesečníkov priamok AD a BE pre všetky trojuholníky ABC s danou vlastnosťou! (*J. Švrček*)

5. Určte všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovujúce rovnici

$$f(x^2+y) + f\bigl(f(x)-y\bigr) = 2f\bigl(f(x)\bigr) + 2y^2$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*P. Kaňovský*)

6. V priestore je daná karteziánska sústava súradníc. Každý bod s celočíselnými súradnicami nazveme *mrežovým*. Ofarbime 2 000 mrežových bodov na modro a iných 2 000 mrežových bodov na červeno tak, aby žiadne dve modročervené úsečky nemali spoločný vnútorný bod. (Úsečku nazývame modročervenou, pokiaľ je jeden jej krajný bod ofarbený na modro a druhý na červeno.) Uvažujme najmenší kváder s hranami rovnobežnými s osami súradníc, ktorý obsahuje všetky ofarbené body.

(a) Dokážte, že kváder obsahuje aspoň 500 000 mrežových bodov.

(b) Uveďte príklad popísaného ofarbenia, keď uvažovaný kváder obsahuje maximálne 8 000 000 mrežových bodov. (*J. Šimša*)