2001/2002
51. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 16. – 19. 6. 2002.*)

1. Nech a, b sú rôzne reálne čísla a k, m prirodzené čísla, pre ktoré platí $k+m=n\geqq 3$, $k\leqq 2m$ a $m\leqq 2k$. Uvažujme postupnosti $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ktoré vyhovujú nasledujúcim podmienkam:

k členov postupnosti sa rovná a, pritom $x_1=a$;
m členov postupnosti sa rovná b; pritom $x_n=b$;
žiadne tri po sebe idúce členy nie sú rovnaké.

Určte všetky možné hodnoty súčtu

$$x_nx_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_nx_1.$$

2. Daný je trojuholník ABC, ktorého obsah je S. Pre jeho dĺžky strán $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$ platí $a\leqq b\leqq c$. Určte najväčšie reálne číslo u a najmenšie reálne číslo v tak, aby pre každý vnútorný bod P trojuholníka ABC bola splnená nerovnosť

$$u\leqq |PD|+|PE|+|PF|\leqq v,$$

kde D, E, F sú po rade priesečníky priamok AP, BP, CP s protiľahlými stranami daného trojuholníka. (Hodnoty u, v vyjadrite pomocou daných veličín a, b, c a S.)

3. Nech $\mathsf{S}=\{1,2,\dots,n\}$, kde n je dané prirodzené číslo. Určte počet všetkých funkcií $f:\mathsf{S}\to\mathsf{S}$ takých, že pre každé $x\in\mathsf{S}$ platí $x+f^4(x)=n+1$. (Symbol f^4 označuje štvrtú iteráciu, t. j. $f^4(x)=f(f(f(f(x))))$.)

4. Nech $n>1$ je prirodzené číslo a p prvočíslo také, že n je deliteľom čísla $p-1$ a súčasne p je deliteľom čísla n^3-1. Dokážte, že $4p-3$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.

5. Nech O označuje stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Body P, Q nech sú po rade takými bodmi jeho strán AC, BC, pre ktoré súčasne platí

$$\frac{|AP|}{|PQ|}=\frac{|BC|}{|AB|}\qquad\text{a}\qquad\frac{|BQ|}{|PQ|}=\frac{|AC|}{|AB|}.$$

Dokážte, že body O, P, Q a C ležia na jednej kružnici.

6. Nech $n\geqq 2$ je párne prirodzené číslo. Uvažujme polynómy tvaru

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+1$$

s reálnymi koeficientmi, ktoré majú aspoň jeden reálny koreň. Určte najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2$.