2002/2003
52. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 15. – 18. 6. 2003.*)

1. Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \max\{1, x_1\} &= x_2, \\ \max\{2, x_2\} &= x_3, \\ &\vdots \\ \max\{n-1, x_{n-1}\} &= (n-1)x_n, \\ \max\{n, x_n\} &= nx_1. \end{aligned}$$

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom veľkosť vnútorného uhla pri vrchole B je väčšia ako $45°$. Nech D, E, F sú po rade päty výšok z vrcholov A, B, C a nech K je taký bod úsečky AF, že platí $|\measuredangle DKF| = |\measuredangle KEF|$. Dokážte, že

a) taký bod K vždy existuje;
b) platí rovnosť $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$.

3. Ak pre čísla p, q, r z intervalu $\langle 2/5, 5/2\rangle$ platí $pqr = 1$, potom existujú dva trojuholníky s rovnakým obsahom, pričom jeden má strany a, b, c a druhý má strany pa, qb, rc. Dokážte.

4. Daný je trojuholník ABC a v jeho vnútri bod P ležiaci na ťažnici z vrcholu C. Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že ak je štvoruholník $ABXY$ tetivový, potom je trojuholník ABC rovnoramenný.

5. Určte všetky prirodzené čísla $n \geqq 2$, pre ktoré sú všetky binomické koeficienty

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$$

párne čísla.

6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ spĺňajú vzťah

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = 2x + f\bigl(f(y) - x\bigr).$$