MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Rozhodnite, či platí:

a) Každý deliteľ párneho čísla je párny.
b) Každý deliteľ nepárneho čísla je nepárny.
c) Párne číslo delí iba párne čísla.
d) Nepárne číslo delí iba nepárne čísla.

N2 Nájdite všetky štvorciferné čísla s vlastnosťou zo zadania zložené z cifier 5, 6, 7, 8.

N3 Zapíšte všetky cifry 1 až 9 do deväťciferného čísla tak, aby každá dvojica po sebe idúcich cifier (zľava doprava) bola násobok 7 alebo 13.

D1 Rozostavte po obvode kruhu čo najviac rôznych cifier tak, aby každá susedná dvojica tvorila vo vhodnom poradí násobok čísla 7.

2

N1 Číslo x je jednociferné, číslo y dvojciferné a číslo z trojciferné. Usporiadajte podľa veľkosti čísla

a) $y + z + z$, $z + x + x$, $x + z + z$,
b) $2x + y$, $2y + z$, $2z + y$, $2y + x$.

N2 Pre prirodzené čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x + 5y$ je naj ako 2025 a hodnota $5x + 3y$ je menšia ako 2026. Aká je najväčšia možná hodnota súčtu $x + y$?

D1 Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať, ak sčítame každé dve z daných 5 rôznych prirodzených čísel? Pre každý možný počet uveďte príklad takej pätice čísel.

D2 Na tabuli je napísaných päť navzájom rôznych kladných čísel. Určte najväčší možný počet takých dvojíc prvkov 5-prvkovej množiny, v ktorých je súčet oboch prvkov rovný ďalšiemu jej prvku.

3

N1 Z vrcholu K rovnoramenného trojuholníka so základňou LM vychádzajú dve polpriamky, ktoré pretnú základňu v bodoch X a Y. Pritom $|\sphericalangle LKM| = 75°$, $|\sphericalangle LKX| = 20°$, $|\sphericalangle MKY| = 20°$. Dokážte, že $|LX| = |MY|$.

N2 Nájdite pravouhlý trojuholník, v ktorom je pomer veľkostí dvoch vnútorných uhlov aj pomer dĺžok dvoch strán rovný $1 : 2$.

N3 Vzdialenosť bodu T od stredu S kružnice k sa rovná priemeru kružnice. Bodom T vedieme dotyčnice TA a TB, ktoré sa kružnice dotýkajú v bodoch A, resp. B. Určte vnútorné uhly trojuholníkov TSB a ASB.

D1 V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica k so stredom A a polomerom $|AC|$ pretína preponu AB v jej strede S. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k.

D2 V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$, kde $|AB| < |BC|$. Na jeho strane BC existuje bod K a na strane CD bod L tak, že daný obdĺžnik je úsečkami AK, KL a LA rozdelený na štyri navzájom podobné trojuholníky. Určte hodnotu $|AB| : |BC|$.

4

N1 Určte dve čísla, ktorých súčet je 20 a rozdiel je 25.

N2 Zápis trojciferného čísla sa začína cifrou 4. Keď ju zotrieme a napíšeme na koniec, dostaneme trojciferné číslo rovné 3/4 pôvodného čísla. Určte pôvodné číslo.

N3 Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) cifier (a, b, c) také, že čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere $63 : 36$.

D1 Nájdite všetky prirodzené čísla s vlastnosťou: Keď toto číslo vynásobíme číslom o 1 väčším a k výsledku pripíšeme sprava 25, dostaneme druhú mocninu nejakého prirodzeného čísla.

D2 Existujú dvojciferné čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ také, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

D3 Z troch rôznych nenulových cifier sme zostavili všetkých šesť možných trojciferných čísel. Tieto čísla sme zoradili od najväčšieho po najmenšie. Zistili sme, že štvrté číslo v tomto rade je aritmetickým priemerom prvého a piateho čísla. Z ktorých cifier boli čísla zostavené?

D4 Nájdite najväčšie päťmiestne prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom 101 a ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu.

5

N1 Majme trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, pričom $|\sphericalangle ABC| = 25°$. Os strany AB pretína odvesnu BC v bode K. Určte veľkosť uhla KAC.

N2 V trojuholníku ABC označíme D priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole A so stranou BC. Na strane AB nájdeme taký bod M, že MD je rovnobežná s AC. Dokážte, že úsečky AM a DM majú rovnakú dĺžku.

N3 V rovnoramennom trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC|$ a na ramene AB je bod D taký, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočítajte veľkosti uhlov trojuholníka ABC.

N4 V lichobežníku $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, sa osi vnútorných uhlov pri vrcholoch C a D pretínajú na úsečke AB. Dokážte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.

D1 V rovnobežníku $ABCD$ platí, že os uhla ABC prechádza stredom L strany CD. Dokážte, že $AL \perp BL$.

D2 Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ so zhodnými uhlami pri vrcholoch A a B. Nech sa osi jeho strán BC a AD pretínajú v bode, ktorý leží na strane AB. Dokážte, že $|AC| = |BD|$.

D3 V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a D a E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, resp. CPB. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE.

6

N1 Zo 4 buchiet na tanieri je 1 tvarohová, zvyšné 3 sú lekvárové. Na koľko najmenej otázok zistíme od nášho kuchára, ktorá je tvarohová?

N2 Náš kuchár pripravil tvarohové a lekvárové buchty, 4 jedného typu, 7 druhého typu. Položili sme mu 5 otázok na 10 rôznych buchiet a zakaždým zaznela tá istá odpoveď. Jedenástu buchtu sme sa rozhodli zjesť, a bola lekvárová. Ktorých buchiet bolo viac?

D1 Na začiatku je na stole k kôpok, na ktorých je postupne $1, 2, \dots, k$ žetónov. V každom ťahu vyberieme ľubovoľné dve kôpky a odstránime z oboch rovnaký počet žetónov. Cieľom je, aby na stole zostal jediný žetón. Môže sa to podariť, ak

a) $k = 10$,

b) $k = 11$?

D2 Na tabuli boli napísané čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V každom kroku sme dve čísla zotreli a nahradili druhou mocninou ich rozdielu. Ak po nanajvýš 7 krokoch zostali na tabuli všetky čísla rovnaké, mohli to byť čísla

a) nepárne,

b) párne?

D3 V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané „−“ a v ostatných políčkach „+“. V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Rozhodnite, či platí:

a) Každý deliteľ párneho čísla je párny.
b) Každý deliteľ nepárneho čísla je nepárny.
c) Párne číslo delí iba párne čísla.
d) Nepárne číslo delí iba nepárne čísla.

Riešenie:

a) Nie, 6 má deliteľ 3.
b) Áno.
c) Áno.
d) Nie, 3 delí 6.

N2 Nájdite všetky štvorciferné čísla s vlastnosťou zo zadania zložené z cifier 5, 6, 7, 8.

Riešenie:

Je to len 5768.

N3 Zapíšte všetky cifry 1 až 9 do deväťciferného čísla tak, aby každá dvojica po sebe idúcich cifier (zľava doprava) bola násobok 7 alebo 13.

Riešenie:

Ak si vypíšeme dvojciferné násobky 7 a 13, zistíme, že zápis žiadneho z nich okrem 77 sa nekončí cifrou 7. Preto sa musí hľadané číslo cifrou 7 začínať a jediné prípustné pokračovanie je 784. Ďalšie cifry je možné pridávať viacerými spôsobmi, jedno z riešení je napr. 784913526.

D1 Rozostavte po obvode kruhu čo najviac rôznych cifier tak, aby každá susedná dvojica tvorila vo vhodnom poradí násobok čísla 7.

Riešenie:

Vieme rozostaviť 5 cifier napr. v poradí 1, 2, 4, 8, 9. Viac ako 5 cifier sa nedá rozostaviť. Vypísaním násobkov 7 sa presvedčíme, že každé dve susedné cifry musia patriť do rovnakej množiny z týchto troch: $\{9, 1, 4, 2, 8\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{7, 0\}$.

2

N1 Číslo x je jednociferné, číslo y dvojciferné a číslo z trojciferné. Usporiadajte podľa veľkosti čísla

a) $y + z + z, z + x + x, x + z + z$,
b) $2x + y$, $2y + z$, $2z + y$, $2y + x$.

Riešenie:

a) Ak sú dva sčítance pri dvoch súčtoch zhodné, o poradí rozhoduje tretí sčítanec. Keďže $x < y < z$, platí aj $z + x + x < x + z + z < y + z + z$.
b) Výrazy si možno napríklad opäť zapísať ako súčet troch sčítancov a ďalej postupovať ako v časti a). Vyjde $2x + y < 2y + x < 2y + z < 2z + y$.

N2 Pre prirodzené čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x + 5y$ je naj ako 2025 a hodnota $5x + 3y$ je menšia ako 2026. Aká je najväčšia možná hodnota súčtu $x + y$?

Riešenie:

Platí

$$(3x + 5y) + (5x + 3y) < 2024 + 2025,$$

$$8x + 8y < 4049,$$

$$x + y \leq 506.$$

Pritom hodnota 506 je dosiahnuteľná, a to v prípade $x = y = 253$.

D1 Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať, ak sčítame každé dve z daných 5 rôznych prirodzených čísel? Pre každý možný počet uveďte príklad takej pätice čísel.

Riešenie:

MO 52-B-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=267).

D2 Na tabuli je napísaných päť navzájom rôznych kladných čísel. Určte najväčší možný počet takých dvojíc prvkov 5-prvkovej množiny, v ktorých je súčet oboch prvkov rovný ďalšiemu jej prvku.

Riešenie:

MO 66-B-S-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2246).

3

N1 Z vrcholu K rovnoramenného trojuholníka so základňou LM vychádzajú dve polpriamky, ktoré pretnú základňu v bodoch X a Y. Pritom $|\sphericalangle LKM| = 75°$, $|\sphericalangle LKX| = 20°$, $|\sphericalangle MKY| = 20°$. Dokážte, že $|LX| = |MY|$.

Riešenie:

Rovnoramenný trojuholník má vnútorné uhly pri základni zhodné, a tak pre trojuholníky KLX a KMY platí $|\sphericalangle KLX| = |\sphericalangle KMY|$, ďalej $|KL| = |KM|$ a podľa zadania $|\sphericalangle LKX| = |\sphericalangle MKY|$. Sú teda zhodné podľa vety *usu*, a preto $|LX| = |MY|$.

N2 Nájdite pravouhlý trojuholník, v ktorom je pomer veľkostí dvoch vnútorných uhlov aj pomer dĺžok dvoch strán rovný $1 : 2$.

Riešenie:

Trojuholník s uhlami 90°, 45°, 45° nemá strany v správnom pomere. Pripadá do úvahy už len trojuholník s uhlami 90°, 60°, 30°. Označme jeho preponu AB a predĺžme jeho kratšiu odvesnu BC do bodu D tak, že C je stred BD. Trojuholníky ABC a ADC sú zhodné podľa vety *sus*, trojuholník ABD je rovnostranný, a tak $2\,|BC| = |BD| = |AB|$. Hľadaný trojuholník je teda „polovicou“ rovnostranného trojuholníka.

N3 Vzdialenosť bodu T od stredu S kružnice k sa rovná priemeru kružnice. Bodom T vedieme dotyčnice TA a TB, ktoré sa kružnice dotýkajú v bodoch A, resp. B. Určte vnútorné uhly trojuholníkov TSB a ASB.

Riešenie:

Pravouhlý trojuholník TSB je taký, že $|BS| : |TS| = 1 : 2$. Podobne ako v riešení predošlej úlohy ho môžeme doplniť na rovnostranný trojuholník TSC, kde B je stred SC. Potom $|\sphericalangle TSB| = 60°$ a $|\sphericalangle BTS| = 30°$ a rovnoramenný trojuholník ASB má vnútorné uhly 120°, 30°, 30°.

D1 V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica k so stredom A a polomerom $|AC|$ pretína preponu AB v jej strede S. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k.

Riešenie:

MO 51-C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=280).

D2 V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$, kde $|AB| < |BC|$. Na jeho strane BC existuje bod K a na strane CD bod L tak, že daný obdĺžnik je úsečkami AK, KL a LA rozdelený na štyri navzájom podobné trojuholníky. Určte hodnotu $|AB| : |BC|$.

Riešenie:

MO 53-C-II-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=261).

4

N1 Určte dve čísla, ktorých súčet je 20 a rozdiel je 25.

Riešenie:

Tieto čísla označme x a y. Podmienky zo zadania zapíšeme ako rovnice $x + y = 20$, $x - y = 25$. Stačí vyjadriť x pomocou y, napr. $x = y + 25$, a dosadiť do zostávajúcej rovnice $(y + 25) + y = 20$, čo dá $2y = -5$, t. j. $y = -2{,}5$. Z toho $x = 22{,}5$.

N2 Zápis trojciferného čísla sa začína cifrou 4. Keď ju zotrieme a napíšeme na koniec, dostaneme trojciferné číslo rovné 3/4 pôvodného čísla. Určte pôvodné číslo.

Riešenie:

Hodnotu zostávajúceho dvojčíslia označíme x. Pôvodné číslo je možné vyjadriť ako $400 + x$, po premiestnení cifry 4 je to $10x + 4$. Rovnica $10x + 4 = \frac{3}{4}(400 + x)$ má koreň 32. Pôvodné číslo teda bolo 432.

N3 Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) cifier (a, b, c) také, že čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere $63 : 36$.

Riešenie:

MO 63-C-II-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1079).

D1 Nájdite všetky prirodzené čísla s vlastnosťou: Keď toto číslo vynásobíme číslom o 1 väčším a k výsledku pripíšeme sprava 25, dostaneme druhú mocninu nejakého prirodzeného čísla.

Riešenie:

Opísaná operácia číslu k priradí číslo $100k(k + 1) + 25$. To je druhou mocninou prirodzeného čísla vždy, pretože $100k(k + 1) + 25 = 100k^2 + 100k + 25 = (10k + 5)^2$.

D2 Existujú dvojciferné čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ také, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

Riešenie:

Keby také čísla existovali, platilo by

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} \geq \overline{ab} \cdot 100 > \overline{ab} \cdot \overline{cd},$$

čo by bol spor.

D3 Z troch rôznych nenulových cifier sme zostavili všetkých šesť možných trojciferných čísel. Tieto čísla sme zoradili od najväčšieho po najmenšie. Zistili sme, že štvrté číslo v tomto rade je aritmetickým priemerom prvého a piateho čísla. Z ktorých cifier boli čísla zostavené?

Riešenie:

MO 47-C-II-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2170).

D4 Nájdite najväčšie päťmiestne prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom 101 a ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu.

Riešenie:

MO 52-B-S-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=267).

5

N1 Majme trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, pričom $|\sphericalangle ABC| = 25°$. Os strany AB pretína odvesnu BC v bode K. Určte veľkosť uhla KAC.

Riešenie:

Bod K leží na osi úsečky AB, platí teda $|AK| = |BK|$. Trojuholník AKB je potom rovnoramenný a $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle KBA| = 25°$. Z toho

$$|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle KAB| = (90° - |\sphericalangle ABC|) - 25° = 40°.$$

N2 V trojuholníku ABC označíme D priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole A so stranou BC. Na strane AB nájdeme taký bod M, že MD je rovnobežná s AC. Dokážte, že úsečky AM a DM majú rovnakú dĺžku.

Riešenie:

Priamka AD je osou uhla pri vrchole A, takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle MAD|$. Okrem toho uhly CAD a MDA sú striedavé, pretože MD a AC sú rovnobežné. Trojuholník AMD je teda rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.

N3 V rovnoramennom trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC|$ a na ramene AB je bod D taký, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočítajte veľkosti uhlov trojuholníka ABC.

Riešenie:

Nech $x = |\sphericalangle BAC|$. Z rovnoramennosti trojuholníka ADC máme $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA| = x$. Vonkajší uhol BDC je ich súčtom, t. j. $|\sphericalangle BDC| = 2x$. Z rovnoramennosti trojuholníka BDC máme $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBC| = 2x$ a Z rovnoramennosti trojuholník ABC máme $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = 2x$. Z toho $x + 2x + 2x = 180°$, takže $x = 36°$, a teda hľadané uhly majú veľkosti $36°, 72°, 72°$.

N4 V lichobežníku $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, sa osi vnútorných uhlov pri vrcholoch C a D pretínajú na úsečke AB. Dokážte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.

Riešenie:

MO 73-C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4911).

D1 V rovnobežníku $ABCD$ platí, že os uhla ABC prechádza stredom L strany CD. Dokážte, že $AL \perp BL$.

Riešenie:

MO 71-C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3929).

D2 Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ so zhodnými uhlami pri vrcholoch A a B. Nech sa osi jeho strán BC a AD pretínajú v bode, ktorý leží na strane AB. Dokážte, že $|AC| = |BD|$.

Riešenie:

Priesečník BC a AD označme M. Trojuholníky MBC a MDA sú rovnoramenné a vďaka zhodnosti uhlov pri vrcholoch A a B dokonca podobné. Trojuholníky MBD a MCA sa tak zhodujú nielen v dvoch stranách ($|MB| = |MC|$ a $|MD| = |MA|$), ale aj v uhloch pri vrchole M, pretože ide o vonkajšie uhly pri hlavných vrcholoch *podobných* rovnoramenných trojuholníkov. Zhodujú sa teda aj tretie strany trojuholníkov MBD a MCA, čo sú uhlopriečky BD a CA.

D3 V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a D a E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, resp. CPB. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE.

Riešenie:

MO 58-C-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=37).

6

N1 Zo 4 buchiet na tanieri je 1 tvarohová, zvyšné 3 sú lekvárové. Na koľko najmenej otázok zistíme od nášho kuchára, ktorá je tvarohová?

Riešenie:

Sú potrebné dve otázky. Ak je prvá odpoveď „rovnaké“, ukázali sme na lekvárové buchty, takže zvyšné dve sú rôzne. Spýtame sa na jednu lekvárovú buchtu znova a na jednu z rôznych buchiet. Ak je prvá odpoveď „iné“, sme v rovnakej situácii ako v predchádzajúcom prípade – zvyšné dve buchty sú lekvárové.

N2 Náš kuchár pripravil tvarohové a lekvárové buchty, 4 jedného typu, 7 druhého typu. Položili sme mu 5 otázok na 10 rôznych buchiet a zakaždým zaznela tá istá odpoveď. Jedenástu buchtu sme sa rozhodli zjesť, a bola lekvárová. Ktorých buchiet bolo viac?

Riešenie:

Lekvárových. Nemohlo zaznieť 5 odpovedí „iné“, pretože to by sme museli mať každého typu aspoň 5 buchiet. Zazneli teda len odpovede „rovnaké“. Za každú odpoveď „rovnaké“ odložíme buď 2 lekvárové buchty, alebo 2 tvarohové buchty. Celkom odložíme 10 z 11 buchiet, takže buchty jedného typu sme odložili všetky – musel to byť párny počet 4 buchiet, pretože ich odkladáme po 2. Jedenásta (zjedená) buchta tak musela byť jedna zo 7 buchiet.

D1 Na začiatku je na stole k kôpok, na ktorých je postupne 1, 2, …, k žetónov. V každom ťahu vyberieme ľubovoľné dve kôpky a odstránime z oboch rovnaký počet žetónov. Cieľom je, aby na stole zostal jediný žetón. Môže sa to podariť, ak

a) $k = 10$,

b) $k = 11$?

Riešenie:

MO 72-C-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4361).

D2 Na tabuli boli napísané čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V každom kroku sme dve čísla zotreli a nahradili druhou mocninou ich rozdielu. Ak po nanajvýš 7 krokoch zostali na tabuli všetky čísla rovnaké, mohli to byť čísla

a) nepárne,

b) párne?

Riešenie:

MO 72-C-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4367).

D3 V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané „$-$“ a v ostatných políčkach „+“. V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

Riešenie:

MO 64-C-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1372).

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- preklad: Peter Novotný
- recenzent: Stanislav Krajči