
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie C

1

N1 Rozhodnite, či platí:

- a) Každý deliteľ párneho čísla je párny.
- b) Každý deliteľ nepárneho čísla je nepárny.
- c) Párne číslo delí iba párne čísla.
- d) Nepárne číslo delí iba nepárne čísla.

N2 Nájdite všetky štvorciferné čísla s vlastnosťou zo zadania zložené z cifier 5, 6, 7, 8.

N3 Zapíšte všetky cifry 1 až 9 do deväťciferného čísla tak, aby každá dvojica po sebe idúcich cifier (zľava doprava) bola násobok 7 alebo 13.

D1 Rozostavte po obvode kruhu čo najviac rôznych cifier tak, aby každá susedná dvojica tvorila vo vhodnom poradí násobok čísla 7.

2

N1 Číslo x je jednociferné, číslo y dvojciferné a číslo z trojciferné. Usporiadajte podľa veľkosti čísla

- a) $y + z + z, z + x + x, x + z + z,$
- b) $2x + y, 2y + z, 2z + y, 2y + x.$

N2 Pre prirodzené čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x + 5y$ je menšia ako 2025 a hodnota $5x + 3y$ je menšia ako 2026. Aká je najväčšia možná hodnota súčtu $x + y$?

D1 Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať, ak sčítame každé dve z daných 5 rôznych prirodzených čísel? Pre každý možný počet uveďte príklad takej päťice čísel.

D2 Na tabuli je napísaných päť navzájom rôznych kladných čísel. Určte najväčší možný počet takých dvojíc prvkov 5-prvkovej množiny, v ktorých je súčet oboch prvkov rovný ďalšiemu jej prvku.

3

N1 Z vrcholu K rovnoramenného trojuholníka so základňou LM vychádzajú dve polpriamky, ktoré pretnú základňu v bodoch X a Y . Pritom $\angle LKM = 75^\circ, \angle LKX = 20^\circ, \angle MKY = 20^\circ$. Dokážte, že $|LX| = |MY|$.

N2 Nájdite pravouhlý trojuholník, v ktorom je pomer veľkostí dvoch vnútorných uhlov aj pomer dĺžok dvoch strán rovný $1 : 2$.

N3 Vzdialenosť bodu T od stredu S kružnice k sa rovná priemeru kružnice. Bodom T vedieme dotyčnice TA a TB , ktoré sa kružnice dotýkajú v bodoch A , resp. B . Určte vnútorné uhly trojuholníkov TSB a ASB .

D1 V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica k so stredom A a polomerom $|AC|$ pretína preponu AB v jej strede S . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k .

D2 V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$, kde $|AB| < |BC|$. Na jeho strane BC existuje bod K a na strane CD bod L tak, že daný obdĺžnik je úsečkami AK, KL a LA rozdelený na štyri navzájom podobné trojuholníky. Určte hodnotu $|AB| : |BC|$.

4

N1 Určte dve čísla, ktorých súčet je 20 a rozdiel je 25.

N2 Zápis trojciferného čísla sa začína cifrou 4. Keď ju zotrieme a napíšeme na koniec, dostaneme trojciferné číslo rovné $3/4$ pôvodného čísla. Určte pôvodné číslo.

N3 Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) cifier (a, b, c) také, že čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere $63 : 36$.

D1 Nájdite všetky prirodzené čísla s vlastnosťou: Keď toto číslo vynásobíme číslom o 1 väčším a k výsledku pripíšeme sprava 25, dostaneme druhú mocninu nejakého prirodzeného čísla.

D2 Existujú dvojciferné čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ také, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

- D3** Z troch rôznych nenulových cifier sme zostavili všetkých šesť možných trojciferných čísel. Tieto čísla sme zoradili od najväčšieho po najmenšie. Zistili sme, že štvrté číslo v tomto rade je aritmetickým priemerom prvého a piateho čísla. Z ktorých cifier boli čísla zostavené?
- D4** Nájdite najväčšie päťmiestne prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom 101 a ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu.
-

5

- N1** Majme trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C , pričom $|\sphericalangle ABC| = 25^\circ$. Os strany AB pretína odvesnu BC v bode K . Určte veľkosť uhla KAC .
- N2** V trojuholníku ABC označíme D priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole A so stranou BC . Na strane AB nájdeme taký bod M , že MD je rovnobežná s AC . Dokážte, že úsečky AM a DM majú rovnakú dĺžku.
- N3** V rovnoramennom trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC|$ a na ramene AB je bod D taký, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočítajte veľkosti uhlov trojuholníka ABC .
- N4** V lichobežníku $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, sa osi vnútorných uhlov pri vrcholoch C a D pretínajú na úsečke AB . Dokážte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.
- D1** V rovnobežníku $ABCD$ platí, že os uhla ABC prechádza stredom L strany CD . Dokážte, že $AL \perp BL$.
- D2** Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ so zhodnými uhlami pri vrcholoch A a B . Nech sa osi jeho strán BC a AD pretínajú v bode, ktorý leží na strane AB . Dokážte, že $|AC| = |BD|$.
- D3** V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P päť výšky z vrcholu C na preponu AB a D a E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC , resp. CPB . Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE .
-

6

- N1** Zo 4 buchiet na tanieri je 1 tvarohová, zvyšné 3 sú lekvárové. Na koľko najmenej otázok zistíme od nášho kuchára, ktorá je tvarohová?
- N2** Náš kuchár pripravil tvarohové a lekvárové buchty, 4 jedného typu, 7 druhého typu. Položili sme mu 5 otázok na 10 rôznych buchiet a zakaždým zaznela tá istá odpoveď. Jedenástu buchtu sme sa rozhodli zjesť, a bola lekvárová. Ktorých buchiet bolo viac?
- D1** Na začiatku je na stole k kôpok, na ktorých je postupne 1, 2, ..., k žetónov. V každom ťahu vyberieme ľubovoľné dve kôpky a odstránime z oboch rovnaký počet žetónov. Cieľom je, aby na stole zostal jediný žetón. Môže sa to podariť, ak
- a) $k = 10$,
b) $k = 11$?
- D2** Na tabuli boli napísané čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V každom kroku sme dve čísla zotreli a nahradili druhou mocninou ich rozdielu. Ak po nanajvýš 7 krokoch zostali na tabuli všetky čísla rovnaké, mohli to byť čísla
- a) nepárne,
b) párne?
- D3** V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané „–“ a v ostatných políčkach „+“. V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie C

1

N1 Rozhodnite, či platí:

- a) Každý deliteľ párneho čísla je párny.
- b) Každý deliteľ nepárneho čísla je nepárny.
- c) Párne číslo delí iba párne čísla.
- d) Nepárne číslo delí iba nepárne čísla.

Riešenie:

- a) Nie, 6 má deliteľ 3.
- b) Áno.
- c) Áno.
- d) Nie, 3 delí 6.

N2 Nájdite všetky štvorciferné čísla s vlastnosťou zo zadania zložené z cifier 5, 6, 7, 8.

Riešenie:

Je to len 5768.

N3 Zapíšte všetky cifry 1 až 9 do deväťciferného čísla tak, aby každá dvojica po sebe idúcich cifier (zľava doprava) bola násobok 7 alebo 13.

Riešenie:

Ak si vypíšeme dvojciferné násobky 7 a 13, zistíme, že zápis žiadneho z nich okrem 77 sa nekončí cifrou 7. Preto sa musí hľadané číslo cifrou 7 začínať a jediné prípustné pokračovanie je 784. Ďalšie cifry je možné pridávať viacerými spôsobmi, jedno z riešení je napr. 784913526.

D1 Rozostavte po obvode kruhu čo najviac rôznych cifier tak, aby každá susedná dvojica tvorila vo vhodnom poradí násobok čísla 7.

Riešenie:

Vieme rozostaviť 5 cifier napr. v poradí 1, 2, 4, 8, 9. Viac ako 5 cifier sa nedá rozostaviť. Vypísaním násobkov 7 sa presvedčíme, že každé dve susedné cifry musia patriť do rovnakej množiny z týchto troch: {9, 1, 4, 2, 8}, {3, 5, 6}, {7, 0}.

2

N1 Číslo x je jednociferné, číslo y dvojciferné a číslo z trojciferné. Usporiadajte podľa veľkosti čísla

- a) $y + z + z, z + x + x, x + z + z,$
- b) $2x + y, 2y + z, 2z + y, 2y + x.$

Riešenie:

- a) Ak sú dva sčítance pri dvoch súčtoch zhodné, o poradí rozhoduje tretí sčítanec. Keďže $x < y < z$, platí aj $z + x + x < x + z + z < y + z + z.$
- b) Výrazy si možno napríklad opäť zapísať ako súčet troch sčítancov a ďalej postupovať ako v časti a). Vyjde $2x + y < 2y + x < 2y + z < 2z + y.$

N2 Pre prirodzené čísla x, y platí, že hodnota výrazu $3x + 5y$ je menšia ako 2025 a hodnota $5x + 3y$ je menšia ako 2026. Aká je najväčšia možná hodnota súčtu $x + y$?

Riešenie:

Platí

$$(3x + 5y) + (5x + 3y) \leq 2024 + 2025,$$

$$8x + 8y \leq 4049,$$

$$x + y \leq 506.$$

Pritom hodnota 506 je dosiahnuteľná, a to v prípade $x = y = 253$.

- D1** Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať, ak sčítame každé dve z daných 5 rôznych prirodzených čísel? Pre každý možný počet uveďte príklad takej päťice čísel.

Riešenie:

MO 52-B-S-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=267>).

- D2** Na tabuli je napísaných päť navzájom rôznych kladných čísel. Určte najväčší možný počet takých dvojíc prvkov 5-prvkovej množiny, v ktorých je súčet oboch prvkov rovný ďalšiemu jej prvku.

Riešenie:

MO 66-B-S-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2246>).

3

- N1** Z vrcholu K rovnoramenného trojuholníka so základňou LM vychádzajú dve polpriamky, ktoré pretnú základňu v bodoch X a Y . Pritom $|\sphericalangle LKM| = 75^\circ$, $|\sphericalangle LKX| = 20^\circ$, $|\sphericalangle MKY| = 20^\circ$. Dokážte, že $|LX| = |MY|$.

Riešenie:

Rovnoramenný trojuholník má vnútorné uhly pri základni zhodné, a tak pre trojuholníky KLX a KMY platí $|\sphericalangle KXL| = |\sphericalangle KMY|$, ďalej $|KL| = |KM|$ a podľa zadania $|\sphericalangle LKX| = |\sphericalangle MKY|$. Sú teda zhodné podľa vety *usu*, a preto $|LX| = |MY|$.

- N2** Nájdite pravouhlý trojuholník, v ktorom je pomer veľkostí dvoch vnútorných uhlov aj pomer dĺžok dvoch strán rovný $1 : 2$.

Riešenie:

Trojuholník s uhlami 90° , 45° , 45° nemá strany v správnom pomere. Pripadá do úvahy už len trojuholník s uhlami 90° , 60° , 30° . Označme jeho preponu AB a predĺžme jeho kratšiu odvesnu BC do bodu D tak, že C je stred BD . Trojuholníky ABC a ADC sú zhodné podľa vety *sus*, trojuholník ABD je rovnostranný, a tak $2|BC| = |BD| = |AB|$. Hľadaný trojuholník je teda „polovicou“ rovnostranného trojuholníka.

- N3** Vzdialenosť bodu T od stredu S kružnice k sa rovná priemeru kružnice. Bodom T vedieme dotyčnice TA a TB , ktoré sa kružnice dotýkajú v bodoch A , resp. B . Určte vnútorné uhly trojuholníkov TSB a ASB .

Riešenie:

Pravouhlý trojuholník TSB je taký, že $|BS| : |TS| = 1 : 2$. Podobne ako v riešení predošlej úlohy ho môžeme doplniť na rovnostranný trojuholník TSC , kde B je stred SC . Potom $|\sphericalangle TSB| = 60^\circ$ a $|\sphericalangle BTS| = 30^\circ$ a rovnoramenný trojuholník ASB má vnútorné uhly 120° , 30° , 30° .

- D1** V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica k so stredom A a polomerom $|AC|$ pretína preponu AB v jej strede S . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k .

Riešenie:

MO 51-C-S-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=280>).

- D2** V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$, kde $|AB| < |BC|$. Na jeho strane BC existuje bod K a na strane CD bod L tak, že daný obdĺžnik je úsečkami AK , KL a LA rozdelený na štyri navzájom podobné trojuholníky. Určte hodnotu $|AB| : |BC|$.

Riešenie:

MO 53-C-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=261>).

4

- N1** Určte dve čísla, ktorých súčet je 20 a rozdiel je 25.

Riešenie:

Tieto čísla označme x a y . Podmienky zo zadania zapíšeme ako rovnice $x + y = 20$, $x - y = 25$. Stačí vyjadriť x pomocou y , napr. $x = y + 25$, a dosadiť do zostávajúcej rovnice $(y + 25) + y = 20$, čo dá $2y = -5$, t. j. $y = -2,5$. Z toho $x = 22,5$.

- N2** Zápis trojciferného čísla sa začína cifrou 4. Keď ju zotrieme a napíšeme na koniec, dostaneme trojciferné číslo rovné $3/4$ pôvodného čísla. Určte pôvodné číslo.

Riešenie:

Hodnotu zostávajúceho dvojčíslia označíme x . Pôvodné číslo je možné vyjadriť ako $400 + x$, po premiestnení cifry 4 je to $10x + 4$. Rovnica $10x + 4 = \frac{3}{4}(400 + x)$ má koreň 32. Pôvodné číslo teda bolo 432.

N3 Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) číier (a, b, c) také, že čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere $63 : 36$.

Riešenie:

MO 63-C-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=1079>).

D1 Nájdite všetky prirodzené čísla s vlastnosťou: Keď toto číslo vynásobíme číslom o 1 väčším a k výsledku pripíšeme sprava 25, dostaneme druhú mocninu nejakého prirodzeného čísla.

Riešenie:

Opísaná operácia číslu k priradí číslo $100k(k + 1) + 25$. To je druhou mocninou prirodzeného čísla vždy, pretože $100k(k + 1) + 25 = 100k^2 + 100k + 25 = (10k + 5)^2$.

D2 Existujú dvojčiferné čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ také, že $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

Riešenie:

Keby také čísla existovali, platilo by

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} \geq \overline{ab} \cdot 100 > \overline{ab} \cdot \overline{cd},$$

čo by bol spor.

D3 Z troch rôznych nenulových číier sme zostavili všetkých šesť možných trojčiferných číiel. Tieto čísla sme zoradili od najväčšieho po najmenšie. Zistili sme, že štvrté číslo v tomto rade je aritmetickým priemerom prvého a piateho čísla. Z ktorých číier boli čísla zostavené?

Riešenie:

MO 47-C-II-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=2170>).

D4 Nájdite najväčšie päťmiestne prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom 101 a ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu.

Riešenie:

MO 52-B-S-1 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=267>).

5

N1 Majme trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C , pričom $|\sphericalangle ABC| = 25^\circ$. Os strany AB pretína odvesnu BC v bode K . Určte veľkosť uhla KAC .

Riešenie:

Bod K leží na osi úsečky AB , platí teda $|AK| = |BK|$. Trojuholník AKB je potom rovnoramenný a $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle KBA| = 25^\circ$. Z toho

$$|\sphericalangle KAC| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle KAB| = (90^\circ - |\sphericalangle ABC|) - 25^\circ = 40^\circ.$$

N2 V trojuholníku ABC označíme D priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole A so stranou BC . Na strane AB nájdeme taký bod M , že MD je rovnobežná s AC . Dokážte, že úsečky AM a DM majú rovnakú dĺžku.

Riešenie:

Priamka AD je osou uhla pri vrchole A , takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle MAD|$. Okrem toho uhly CAD a MDA sú striedavé, pretože MD a AC sú rovnobežné. Trojuholník AMD je teda rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.

N3 V rovnoramennom trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC|$ a na ramene AB je bod D taký, že $|AD| = |DC| = |CB|$. Vypočítajte veľkosti uhlov trojuholníka ABC .

Riešenie:

Nech $x = |\sphericalangle BAC|$. Z rovnoramennosti trojuholníka ADC máme $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA| = x$. Vonkajší uhol BDC je ich súčtom, t. j. $|\sphericalangle BDC| = 2x$. Z rovnoramennosti trojuholníka BDC máme $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBC| = 2x$ a z rovnoramennosti trojuholníka ABC máme $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = 2x$. Z toho $x + 2x + 2x = 180^\circ$, takže $x = 36^\circ$, a teda hľadané uhly majú veľkosti $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

N4 V lichobežníku $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, sa osi vnútorných uhlov pri vrchoch C a D pretínajú na úsečke AB . Dokážte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.

Riešenie:

MO 73-C-S-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4911>).

D1 V rovnobežníku $ABCD$ platí, že os uhla ABC prechádza stredom L strany CD . Dokážte, že $AL \perp BL$.

Riešenie:

MO 71-C-S-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=3929>).

D2 Uvažujme konvexný štvoruholník $ABCD$ so zhodnými uhlami pri vrchoch A a B . Nech sa osi jeho strán BC a AD pretínajú v bode, ktorý leží na strane AB . Dokážte, že $|AC| = |BD|$.

Riešenie:

Priesečník BC a AD označme M . Trojuholníky MBC a MDA sú rovnoramenné a vďaka zhodnosti uhlov pri vrchoch A a B dokonca podobné. Trojuholníky MBD a MCA sa tak zhodujú nielen v dvoch stranách ($|MB| = |MC|$ a $|MD| = |MA|$), ale aj v uhloch pri vrchole M , pretože ide o vonkajšie uhly pri hlavných vrchoch *podobných* rovnoramenných trojuholníkov. Zhodujú sa teda aj tretie strany trojuholníkov MBD a MCA , čo sú uhlopriečky BD a CA .

- D3** V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P päť výšky z vrcholu C na preponu AB a D a E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC , resp. CPB . Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE .

Riešenie:

MO 58-C-II-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=37>).

6

- N1** Zo 4 buchiet na tanieri je 1 tvarohová, zvyšné 3 sú lekvárové. Na koľko najmenej otázok zistíme od nášho kuchára, ktorá je tvarohová?

Riešenie:

Sú potrebné dve otázky. Ak je prvá odpoveď „rovnaké“, ukázali sme na lekvárové buchty, takže zvyšné dve sú rôzne. Spýtame sa na jednu lekvárovú buchtu znova a na jednu z rôznych buchiet. Ak je prvá odpoveď „iné“, sme v rovnakej situácii ako v predchádzajúcom prípade – zvyšné dve buchty sú lekvárové.

- N2** Náš kuchár pripravil tvarohové a lekvárové buchty, 4 jedného typu, 7 druhého typu. Položili sme mu 5 otázok na 10 rôznych buchiet a zakaždým zaznela tá istá odpoveď. Jedenástu buchtu sme sa rozhodli zjesť, a bola lekvárová. Ktorých buchiet bolo viac?

Riešenie:

Lekvárových. Nemohlo zaznieť 5 odpovedí „iné“, pretože to by sme museli mať každého typu aspoň 5 buchiet. Zazneli teda len odpovede „rovnaké“. Za každú odpoveď „rovnaké“ odložíme buď 2 lekvárové buchty, alebo 2 tvarohové buchty. Celkom odložíme 10 z 11 buchiet, takže buchty jedného typu sme odložili všetky – musel to byť párny počet 4 buchiet, pretože ich odkladáme po 2. Jedenásta (zjedená) buchtu tak musela byť jedna zo 7 buchiet.

- D1** Na začiatku je na stole k kôpok, na ktorých je postupne 1, 2, ..., k žetónov. V každom ťahu vyberieme ľubovoľné dve kôpky a odstránime z oboch rovnaký počet žetónov. Cieľom je, aby na stole zostal jediný žetón. Môže sa to podariť, ak

- a) $k = 10$,
- b) $k = 11$?

Riešenie:

MO 72-C-I-4 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4361>).

- D2** Na tabuli boli napísané čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V každom kroku sme dve čísla zotreli a nahradili druhou mocninou ich rozdielu. Ak po nanajviš 7 krokoch zostali na tabuli všetky čísla rovnaké, mohli to byť čísla

- a) nepárne,
- b) párne?

Riešenie:

MO 72-C-S-3 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=4367>).

- D3** V jednom políčku šachovnice 8×8 je napísané „–“ a v ostatných políčkach „+“. V jednom kroku môžeme zmeniť na opačné súčasne všetky štyri znamienka v ktoromkoľvek štvorci 2×2 na šachovnici. Rozhodnite, či po určitom počte krokov môže byť na šachovnici oboch znamienok rovnaký počet.

Riešenie:

MO 64-C-II-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=1372>).

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Peter Novotný
 - recenzent: Stanislav Krajčí