MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy
k úlohám domácej prípravy kategórie A

1 Ak nie je uvedené inak, predpokladáme, že kráľovstvo má tvar konvexného mnohouholníka.

N1 Načrtnite konvexný mnohouholník, ktorý

a) má,

b) nemá

práve jeden najvýchodnejší bod.

N2 Nech B a C sú body také, že bod C sa nachádza severozápadne od bodu B. Nájdite všetky body A také, že trojuholník ABC má práve jeden najvýchodnejší bod, a to bod B.

N3 Načrtnite kráľovstvo, ktoré má v jednom zo svojich vrcholov 0, 1, 2, 3 alebo 4 vlajky, alebo dokážte, že také neexistuje.

N4 Vo vnútrozemí ostrova (ako zo zadania súťažnej úlohy) je bod, v ktorom sa stretávajú tri kráľovstvá a sú v ňom zapichnuté práve dve vlajky. Aké všetky kombinácie písmen sa na nich môžu objaviť?

D1 Ukážte, že ak by sme v súťažnej úlohe uvažovali nekonvexné kráľovstvo, mohlo by sa stať, že v krtinci nebude zapichnutá žiadna vlajka.

D2 Vo vnútri konvexného desaťuholníka $A_1 \dots A_{10}$ je daný bod P, ktorý neleží na žiadnej jeho uhlopriečke. Dokážte, že niektoré dve z polpriamok $A_1P, \dots, A_{10}P$ pretínajú rovnakú stranu desaťuholníka.

2

N1 Nájdite všetky riešenia rovnice $\left|x^2 - 1\right| = x + 1$.

N2 Určte počet riešení rovnice $|x - 2| = ax$ pre reálny parameter a.

N3 Pripomeňte si Viètove vzťahy: Nech má kvadratická rovnica $x^2 + px + q = 0$ dva rôzne reálne korene. Vyjadrite ich súčet a súčin pomocou koeficientov p a q.

D1 Uvažujme dve rovnice

$$x^2 + 2px + 2q^2 = 4,$$
$$x^2 - 2qx + 2p^2 = 4$$

s reálnymi parametrami p a q. Nech prvá má dve rôzne riešenia x_1 a x_2 a druhá dve rôzne riešenia x_3 a x_4. Určte všetky možné hodnoty výrazu $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

D2 Určte počet reálnych koreňov rovnice $x^2 + 4 = a|x|$ v závislosti od reálneho parametra a.

D3 Určte počet reálnych koreňov rovnice $x \cdot |x + 6p| = 36$ v závislosti na reálnom parametri p.

D4 Určte všetky hodnoty reálneho parametra p také, že rovnica

$$2017 \cdot |1 - |1 - |1 - x||| = 2016x + p$$

má práve tri riešenia v obore reálnych čísel.

3

N1 Na obdĺžnikovej hracej ploche 4 × 2 sú 4 žetóny očíslované 1, 2, 3, 4 a rozmiestnené ako na obrázku vľavo. V jednom ťahu je možné presunúť jeden žetón z jeho políčka na políčko susediace stranou. Najmenej koľkými ťahmi je možné z pôvodného rozostavenia získať rozostavenie na obrázku vpravo? Na jednom políčku sa môže nachádzať aj viac ako jeden žetón.

N2 Vyriešte predchádzajúcu úlohu za predpokladu, že na jednom políčku sa naraz nemôže nachádzať viac ako jeden žetón.

N3 Dokážte, že v prípade $n = 3$ nemožno hlavolam zo súťažnej úlohy vyriešiť na 3 ťahy.

D1 Vyriešte úlohu N2 všeobecne pre hraciu plochu $2n \times 2$ a $2n$ žetónov v spodnom riadku, pričom n je nenulové prirodzené číslo.

D2 Uvažujme rovnaký hlavolam ako v súťažnej úlohe s dodatočnými obmedzeniami: Kotúče možno vysúvať a nasúvať len zľava a v každom okamihu musia byť kotúče na každej tyči usporiadané vzostupne podľa veľkosti zľava doprava. Ide vlastne o hlavolam známy pod názvom *hanojské veže*. V závislosti od počtu kotúčov určte najmenší počet ťahov nutných na vyriešenie tohto hlavolamu.

D3 Uvažujme modifikáciu hanojských veží, kde je zakázané presúvať kotúče medzi prvou a treťou tyčou. Najmenej koľko ťahov potrebujeme na presun všetkých kotúčov na tretiu tyč?

D4 V kruhu je 100 mimozemšťanov, každý z nich má 100 tabletov. V rámci jedného ťahu ľubovoľný mimozemšťan vezme niekoľko svojich tabletov a rozdelí ich medzi ostatných mimozemšťanov (nie nutne rovnomerne a nie nutne medzi všetkých). Po akom najmenšom počte ťahov môžu mimozemšťania docieliť, aby žiadni dvaja z nich nemali rovnaký počet tabletov?

D5 Na šachovnici rozmerov 8×8 je na každom z ôsmich políčok v prvom rade biela dáma a na každom z ôsmich políčok v ôsmom rade čierna dáma. V jednom ťahu môžeme pohnúť ľubovoľnou dámou podľa šachových pravidiel na voľné políčko. Tieto ťahy opakujeme tak, aby sa farby pohybujúcich sa dám striedali. Určte najmenší počet ťahov, po ktorom budú v prvom rade všetky čierne a v ôsmom rade všetky biele dámy.

4

N1 Nech a a b sú prirodzené čísla a p je prvočíslo p také, že $p \mid a + 6$ a $p \mid b - 3$. Dokážte, že $p \mid a + 2b$.

N2 Ktoré z nasledujúcich dvojíc čísel sú nesúdeliteľné pre všetky dvojice nesúdeliteľných celých čísel a, b?

a) $a, a + b$,

b) $a + b, ab$,

c) $a^2 + b^2, ab$,

d) $a + b, a - b$,

e) $a^3, (a + 1)^5$.

D1 Dokážte, že pre každé celé číslo n je zlomok $\frac{21n+4}{14n+3}$ v základnom tvare.

D2 Nech a, b, c, n sú nenulové prirodzené čísla také, že čísla a, b, c, $a + b + c$ sú po dvoch nesúdeliteľné a číslo $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$ je n. mocninou celého čísla. Dokážte, že abc sa dá zapísať ako rozdiel dvoch n. mocnín celých čísel.

5

N1 Nech p je priamka a nech body A a B ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou p. Nájdite bod X ležiaci na priamke p taký, že hodnota $|AX| + |XB|$ je najmenšia možná.

N2 Nech $ABCD$ je obdĺžnik a M je stred jeho strany BC. Nech G je bod vnútri trojuholníka ABD.

a) Určte bod P strany AD taký, že dĺžka lomenej čiary GPM je minimálna.

b) Určte body P strany AD a Q strany CD také, že dĺžka lomenej čiary $GPQM$ je minimálna.

D1 Je daný uhol XOY, ktorého veľkosť je menšia ako $45°$, a bod A na polpriamke OX. Nájdite body M a N polpriamok postupne OY, OX, pre ktoré je hodnota $|AM| + |MN|$ najmenší.

D2 Nech XOY je konvexný uhol a M jeho vnútorný bod. Nájdite body A a B polpriamok OX, resp. OY také, že $|OA| = |OB|$ a hodnota $|MA| + |MB|$ je najmenšia.

D3 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Dokážte, že existuje bod P taký, že ak K, L, M obrazy ľubovoľného vnútorného bodu ABC v osových súmernostiach postupne podľa priamok BC, CA, AB, tak P leží v trojuholníku KLM.

---

6 N1 Platí tvrdenie súťažnej úlohy, ak namiesto 97 je

a) 5,

b) 7?

N2 Nech p je prvočíslo a a celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom p. Dokážte, že

$$\{(xa) \bmod p\colon x \in \{1, \dots, p - 1\}\} = \{1, \dots, p - 1\}.$$

N3 Nech p je prvočíslo a a celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom p. Dokážte, že existuje práve jeden zvyšok b, pre ktorý platí $(ab) \bmod p = 1$.

N4 Dokážte *(malú) Fermatovu vetu*: Nech p je prvočíslo a a celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom p. Potom p delí číslo $a^{p-1} - 1$.

N5 Nech p je prvočíslo a a, b, c sú celé čísla, pričom p nedelí a. Dokážte, že podmienka $p \mid ax^2 + bx + c$ je splnená najviac pre dve rôzne hodnoty x z $\{0, \dots, p-1\}$.

N6 Dokážte, že číslo $2^{2025} - 8$ je deliteľné 56.

D1 Nech p je nepárne prvočíslo. Číslo a z $\{1, \dots, p-1\}$ nazývame *kvadratický zvyšok po delení* p, keď existuje celé číslo x, pre ktoré platí $x^2 \bmod p = a$. Dokážte, že v množine $\{1, \dots, p-1\}$ je kvadratických zvyškov po delení p rovnako veľa ako čísel, ktoré nie sú kvadratickým zvyškom po delení p.

D2 Dokážte jednu časť *Wilsonovej vety*: Ak p je prvočíslo, tak $p \mid (p-1)! + 1$.

D3 Dokážte, že postupnosť kladných prirodzených čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ taká, že ak n je prirodzené číslo, tak

$$a_{n+1} \in \{2022a_n - 1, 2022a_n + 1\},$$

obsahuje nekonečne veľa zložených čísel.

D4 Určte všetky prirodzené čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s každým členom postupnosti $(2^n + 3^n + 6^n - 1)_{n=0}^{\infty}$.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie A

1 Ak nie je uvedené inak, predpokladáme, že kráľovstvo má tvar konvexného mnohouholníka.

N1 Načrtnite konvexný mnohouholník, ktorý

a) má,

b) nemá

práve jeden najvýchodnejší bod.

Riešenie:

Konvexný mnohouholník má viac najvýchodnejších bodov práve vtedy, ak niektorá jeho strana je rovnobežná so zvislou osou a celý mnohouholník sa nachádza západne od nej.

N2 Nech B a C sú body také, že bod C sa nachádza severozápadne od bodu B. Nájdite všetky body A také, že trojuholník ABC má práve jeden najvýchodnejší bod, a to bod B.

Riešenie:

Vyhovujú práve všetky body, ktoré sa nachádzajú západne od severojužnej priamky prechádzajúcej bodom B a zároveň neležia na priamke BC.

N3 Načrtnite kráľovstvo, ktoré má v jednom zo svojich vrcholov 0, 1, 2, 3 alebo 4 vlajky, alebo dokážte, že také neexistuje.

Riešenie:

Žiadny vrchol nemôže byť súčasne najjužnejším aj najsevernejším bodom kráľovstva a podobne nemôže byť súčasne jeho najvýchodnejším aj najzápadnejším bodom. Možné počty sú tak len 0, 1, 2 a ľahko sa overí, že všetky vyhovujú.

N4 Vo vnútrozemí ostrova (ako zo zadania súťažnej úlohy) je bod, v ktorom sa stretávajú tri kráľovstvá a sú v ňom zapichnuté práve dve vlajky. Aké všetky kombinácie písmen sa na nich môžu objaviť?

Riešenie:

Ani jedna strana ani jedného kráľovstva neleží na severojužnej priamke prechádzajúcej týmto bodom, Tiež sa nemôže stať, že všetky tri hranice budú na jednej strane od tejto priamky, pretože by vzniklo nekonvexné kráľovstvo. Preto na jednej strane od nej je jedna hranica a na druhej zvyšné dve – na tejto strane bude aj vlajka V alebo Z. V uvažovanom bode je tak zapichnutá práve jedna z vlajok V a Z a analogicky aj práve jedna z vlajok S a J. To nám dáva 4 možnosti, a to {S, V}, {S, Z}, {J, V}, {J, Z}.

D1 Ukážte, že ak by sme v súťažnej úlohe uvažovali nekonvexné kráľovstvo, mohlo by sa stať, že v krtinci nebude zapichnutá žiadna vlajka.

Riešenie:

Každé zo 7 kráľovstiev by mohlo byť nekonvexným mnohouholníkom tvaru akejsi „špirály", ktorý má jeden vrchol v krtinci a potom sa obtáča okolo neho. Takto by bolo možné zaistiť, že každý mnohouholník by mal aspoň jeden svoj bod severne, južne, východne aj západne od krtinca. To znamená, že v krtinci by nebola ani jedna vlajka.

D2 Vo vnútri konvexného desaťuholníka $A_1 \dots A_{10}$ je daný bod P, ktorý neleží na žiadnej jeho uhlopriečke. Dokážte, že niektoré dve z polpriamok A_1P, …, $A_{10}P$ pretínajú rovnakú stranu desaťuholníka.

Riešenie:

Hlavná uhlopriečka A_1A_6 rozdelí desaťuholník na dve časti a bod P leží vo vnútri jednej z nich. Bez ujmy na všeobecnosti nech leží vo vnútri šesťuholníka $A_1A_6A_7A_8A_9A_{10}$. Potom 6 polpriamok A_1P, …, A_6P vstúpi do šesťuholníka cez stranu A_1A_6 a opustí tento šesťuholník cez zvyšných 5 strán, takže aspoň dve polpriamky opustia šesťuholník cez rovnakú stranu. Tieto strany sú zároveň strany pôvodného desaťuholníka, takže niektoré dve polpriamky pretnú rovnakú stranu tohto desaťuholníka.

N1 Nájdite všetky riešenia rovnice $\left|x^2-1\right| = x+1$.

Riešenie:

Rozoberieme dva prípady:

- Ak $x^2 \geq 1$, tak $\left|x^2-1\right| = x^2-1$ a riešime rovnicu $x^2-x-2=0$, ktorú je možné upraviť na tvar $(x+1)(x-2)=0$. Získame tak práve dva korene -1 a 2, pre oba platí $x^2 \geq 1$.
- Ak $x^2 < 1$, tak $\left|x^2-1\right| = -x^2+1$ a riešime rovnicu $x^2+x=0$. Získame ďalší koreň 0, pričom pre tento koreň naozaj platí $x^2<1$, a koreň -1, ktorý nevyhovuje, pretože v tomto prípade neplatí $x^2<1$.

Pôvodná rovnica má teda riešenia 2, 0 a -1.

N2 Určte počet riešení rovnice $|x-2| = ax$ pre reálny parameter a.

Riešenie:

- Ak $x \geq 2$, tak riešime rovnicu $x-2=ax$, ktorá v prípade $a=1$ nemá koreň a v prípade $a \neq 1$ má práve koreň $\frac{2}{1-a}$. Má platiť $x \geq 2$, čo je splnené práve v prípade $0 \leq a < 1$.
- Ak $x<2$, tak riešime rovnicu $2-x=ax$, ktorá v prípade $a=-1$ nemá koreň a v prípade $a \neq -1$ má práve koreň $\frac{2}{a+1}$. Má platiť $x<2$, čo je splnené práve v prípade $a<-1$ alebo $a>0$.

Rovnica zo zadania má teda v prípade $a \in (0,1)$ dve riešenia, v prípade $a \in [-1,0)$ nemá riešenie a v ostatných prípadoch má jedno riešenie.

N3 Pripomeňte si Viètove vzťahy: Nech má kvadratická rovnica $x^2+px+q=0$ dva rôzne reálne korene. Vyjadrite ich súčet a súčin pomocou koeficientov p a q.

Riešenie:

Ak má rovnica dva korene x_1 a x_2, tak platí

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2.$$

Z toho $x_1+x_2=-p$ a $x_1x_2=q$.

D1 Uvažujme dve rovnice

$$x^2+2px+2q^2=4,$$
$$x^2-2qx+2p^2=4$$

s reálnymi parametrami p a q. Nech prvá má dve rôzne riešenia x_1 a x_2 a druhá dve rôzne riešenia x_3 a x_4. Určte všetky možné hodnoty výrazu $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

Riešenie:

Z Viètových vzťahov z prvej rovnice $x_1+x_2=-2p$ a $x_1x_2=2q^2-4$ a z druhej $x_3+x_4=2q$ a $x_3x_4=2p^2-4$. Potom

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)+\left(x_3^2+x_4^2\right)=\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)+\left((x_3+x_4)^2-2x_3x_4\right)$$
$$=\left((-2p)^2-2\left(2q^2-4\right)\right)+\left((2q)^2-2\left(2p^2-4\right)\right)=\left(4p^2-4q^2+8\right)+\left(4q^2-4p^2+8\right)=16.$$

Jediná možná hodnota je teda 16, nadobúda sa v prípade $p=q=1$.

D2 Určte počet reálnych koreňov rovnice $x^2+4=a|x|$ v závislosti od reálneho parametra a.

Riešenie:

Úloha MO 71-B-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4057#page=2).

D3 Určte počet reálnych koreňov rovnice $x \cdot |x+6p| = 36$ v závislosti na reálnom parametri p.

Riešenie:

Úloha MO 71-B-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3924#page=3).

D4 Určte všetky hodnoty reálneho parametra p také, že rovnica

$$2017 \cdot |1-|1-|1-x||| = 2016x+p$$

má práve tri riešenia v obore reálnych čísel.

Riešenie:

Úloha MO 66-B-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2387#page=3).

3

N1 Na obdĺžnikovej hracej ploche 4×2 sú 4 žetóny očíslované 1, 2, 3, 4 a rozmiestnené ako na obrázku vľavo. V jednom ťahu je možné presunúť jeden žetón z jeho políčka na políčko susediace stranou. Najmenej koľkými ťahmi je možné z pôvodného rozostavenia získať rozostavenie na obrázku vpravo? Na jednom políčku sa môže nachádzať aj viac ako jeden žetón.

1	2	3	4

4	3	2	1

Riešenie:

Žetón 1 potrebujeme posunúť o 3 políčka doprava, na čo sú potrebné 3 ťahy. Rovnako na žetón 4 potrebujeme aspoň 3 ťahy. Žetóny 2 a 3 potrebujeme posunúť o políčko vedľa, teda na každý z nich potrebujeme aspoň 1 ťah. Dokopy teda potrebujeme aspoň $3 + 1 + 1 + 3$ čiže 8 ťahov. Tento počet ťahov možno zjavne dosiahnuť.

N2 Vyriešte predchádzajúcu úlohu za predpokladu, že na jednom políčku sa naraz nemôže nachádzať viac ako jeden žetón.

Riešenie:

Vodorovných ťahov potrebujeme aspoň 8 na základe úvah z predchádzajúcej úlohy. Ak dva žetóny nevykonajú žiadny zvislý ťah, tak sú po celú dobu v spodnom riadku, a teda ich nevieme vymeniť. Preto najviac jeden žetón vykoná 0 zvislých ťahov. Každý zo zvyšných žetónov musí vykonať zvislý ťah, dokonca aspoň 2, pretože sa musí vrátiť do spodného riadku. Teda dokopy musia žetóny vykonať aspoň $3 \cdot 2$ čiže 6 zvislých ťahov, čo celkovo dáva aspoň $8 + 6$ čiže 14 ťahov.

Za 14 ťahov vieme hlavolam vyriešiť nasledovne: Najskôr žetóny 2, 3, 4 presunieme do horného riadka (3 ťahy). Potom presunieme žetón 1 úplne doprava (3 ťahy). Presunieme žetón 2 dole a doprava (2 ťahy). Žetón 3 presunieme vľavo, dole (2 ťahy) a žetón 4 vľavo, vľavo, vľavo, dole (4 ťahy).

N3 Dokážte, že v prípade $n = 3$ nemožno hlavolam zo súťažnej úlohy vyriešiť na 3 ťahy.

Riešenie:

Každý kotúč musíme presunúť aspoň raz, čiže pri 3 ťahoch musí byť každý kotúč presunutý práve raz. Preto aspoň dva kotúče musia byť vysunuté z prvej tyče z rovnakej strany. Keďže ich už potom nepresúvame, tak ich musíme nasunúť na druhú tyč. Potom však nebudú na druhej tyči v správnom poradí.

D1 Vyriešte úlohu N2 všeobecne pre hraciu plochu $2n \times 2$ a $2n$ žetónov v spodnom riadku, pričom n je nenulové prirodzené číslo.

Riešenie:

Úloha MO 72-A-I-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4205#page=3).

D2 Uvažujme rovnaký hlavolam ako v súťažnej úlohe s dodatočnými obmedzeniami: Kotúče možno vysúvať a nasúvať len zľava a v každom okamihu musia byť kotúče na každej tyči usporiadané vzostupne podľa veľkosti zľava doprava. Ide vlastne o hlavolam známy pod názvom *hanojské veže*. V závislosti od počtu kotúčov určte najmenší počet ťahov nutných na vyriešenie tohto hlavolamu.

Riešenie:

Dokážeme indukciou, že ak je počet kotúčov n, najmenší počet ťahov na ich premiestnenie medzi ľubovoľnými dvoma tyčami je $2^n - 1$:

1) Ak je počet kotúčov 0, tento počet ťahov je 0 čiže $2^0 - 1$.
2) Predpokladajme, že pre n kotúčov je tento počet ťahov $2^n - 1$. Aby sme mohli presunúť najväčší kotúč zo starej tyče na novú, musí byť ako jediný na starej a zvyšných n kotúčov musí byť na zvyšnej tyči. Na ich presun potrebujeme podľa indukčného predpokladu $2^n - 1$ ťahov. Po presunutí najväčšieho kotúča musíme na novú tyč presunúť ešte zvyšných n kotúčov, na čo opäť potrebujeme podľa indukčného predpokladu aspoň $2^n - 1$ ťahov. Celkovo tak treba aspoň $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1)$ čiže $2^{n+1} - 1$ ťahov. Konkrétna postupnosť ťahov priamo vyplýva zo spôsobu získania tohto odhadu.

D3 Uvažujme modifikáciu hanojských veží, kde je zakázané presúvať kotúče medzi prvou a treťou tyčou. Najmenej koľko ťahov potrebujeme na presun všetkých kotúčov na tretiu tyč?

Riešenie:

Dokážeme indukciou, že ak je počet kotúčov n, najmenší počet ťahov na ich premiestnenie medzi prvou a treťou tyčou je $3^n - 1$:

1) Ak je počet kotúčov 0, tento počet ťahov je 0 čiže $3^0 - 1$.
2) Predpokladajme, že pre n kotúčov je tento počet ťahov $3^n - 1$. Aby sme mohli presunúť najväčší kotúč z prvej tyče na tretiu, musíme ho najprv presunúť na druhú tyč. Predtým však musíme zvyšných n kotúčov presunúť z prvej tyče na tretiu, na čo treba $3^n - 1$ ťahov. Aby sme mohli presunúť najväčší kotúč z druhej tyče na tretiu, predtým musíme zvyšných n kotúčov presunúť z tretej tyče na prvú, na čo treba $3^n - 1$ ťahov, a po jeho presune ich presunúť z prvej tyče na tretiu, na čo treba $3^n - 1$ ťahov. Celkovo tak treba aspoň $(3^n - 1) + 1 + (3^n - 1) + 1 + (3^n - 1)$ čiže $3^{n+1} - 1$ ťahov. Konkrétna postupnosť ťahov priamo vyplýva zo spôsobu získania tohto odhadu.

D4 V kruhu je 100 mimozemšťanov, každý z nich má 100 tabletov. V rámci jedného ťahu ľubovoľný mimozemšťan vezme niekoľko svojich tabletov a rozdelí ich medzi ostatných mimozemšťanov (nie nutne rovnomerne a nie nutne medzi všetkých). Po akom najmenšom počte ťahov môžu mimozemšťania docieliť, aby žiadni dvaja z nich nemali rovnaký počet tabletov?

Riešenie:

KMS 2018/19, 2. letné kolo, úloha 3 (https://kms.sk/ulohy/riesenia/1687/).

D5 Na šachovnici rozmerov 8×8 je na každom z ôsmich políčok v prvom rade biela dáma a na každom z ôsmich políčok v ôsmom rade čierna dáma. V jednom ťahu môžeme pohnúť ľubovoľnou dámou podľa šachových pravidiel na voľné políčko. Tieto ťahy opakujeme tak, aby sa farby pohybujúcich sa dám striedali. Určte najmenší počet ťahov, po ktorom budú v prvom rade všetky čierne a v ôsmom rade všetky biele dámy.

Riešenie:

KMS 2018/19, 2. letné kolo, úloha 7 (https://kms.sk/ulohy/riesenia/1691/).

4

N1 Nech a a b sú prirodzené čísla a p je prvočíslo p také, že $p \mid a + 6$ a $p \mid b - 3$. Dokážte, že $p \mid a + 2b$.

Riešenie:

Keďže $p \mid a + 6$ a $p \mid b - 3$, platí $p \mid (a + 6) + 2 \cdot (b - 3) = a + 2b$.

N2 Ktoré z nasledujúcich dvojíc čísel sú nesúdeliteľné pre všetky dvojice nesúdeliteľných celých čísel a, b?

a) $a, a + b$,
b) $a + b, ab$,
c) $a^2 + b^2, ab$,
d) $a + b, a - b$,
e) $a^3, (a + 1)^5$.

Riešenie:

a) Nech existuje prvočíslo, ktoré delí a aj $a+b$. Potom delí aj $(a+b)-a$ čiže b, čo je spor s nesúdeliteľnosťou a a b. Čísla a a $a + b$ sú teda nesúdeliteľné.
b) Nech existuje prvočíslo p, ktoré delí $a + b$ aj ab. Potom $p \mid a$ alebo $p \mid b$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $p \mid a$. Potom z $p \mid a + b$ vyplýva, že $p \mid b$, čo je spor s nesúdeliteľnosťou čísel a a b.

   Čísla $a + b$ a ab sú teda nesúdeliteľné.
c) Nech existuje prvočíslo p, ktoré delí $a^2 + b^2$ aj ab. Potom $p \mid a$ alebo $p \mid b$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $p \mid a$, takže $p \mid a^2$. Potom z $p \mid a^2 + b^2$ vyplýva, že $p \mid b^2$, takže $p \mid b$, čo je spor s nesúdeliteľnosťou čísel a a b.

   Čísla $a^2 + b^2$ a ab sú teda nesúdeliteľné.
d) Ak $a = 3$ a $b = 1$, čo sú nesúdeliteľné čísla, tak $a + b = 4$ a $a - b = 2$, čo sú súdeliteľné čísla.
e) Nech existuje prvočíslo, ktoré delí a^3 aj $(a + 1)^5$. Potom delí aj a aj $a + 1$, takže delí $(a + 1) - a$ čiže 1, čo je spor.

   Čísla a^3 a $(a + 1)^5$ sú teda nesúdeliteľné.

D1 Dokážte, že pre každé celé číslo n je zlomok $\frac{21n+4}{14n+3}$ v základnom tvare.

Riešenie:

(IMO 1959, úloha 1)

Nech existuje prvočíslo p také, že $p \mid 21n+4$ a súčasne $p \mid 14n+3$. Potom $p \mid 3 \cdot (14n+3) - 2 \cdot (21n+4) = 1$, čo je spor.

D2 Nech a, b, c, n sú nenulové prirodzené čísla také, že čísla $a, b, c, a + b + c$ sú po dvoch nesúdeliteľné a číslo $(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$ je n. mocninou celého čísla. Dokážte, že abc sa dá zapísať ako rozdiel dvoch n. mocnín celých čísel.

Riešenie:

Úloha MO 68-A-III-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3121#page=6).

5

N1 Nech p je priamka a nech body A a B ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou p. Nájdite bod X ležiaci na priamke p taký, že hodnota $|AX| + |XB|$ je najmenšia možná.

Riešenie:

Nech B' je bod osovo súmerný s bodom B podľa priamky p. Potom pre ľubovoľný bod X priamky p platí zo symetrie $|XB| = |XB'|$. Z trojuholníkovej nerovnosti $|AX|+|XB| = |AX|+|XB'| \geq |AB'|$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď X leží na AB'. Hľadaný bod X je teda priesečníkom priamok AB' a p.

N2 Nech $ABCD$ je obdĺžnik a M je stred jeho strany BC. Nech G je bod vnútri trojuholníka ABD.

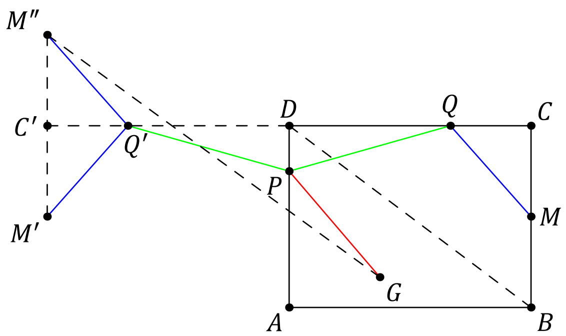
a) Určte bod P strany AD taký, že dĺžka lomenej čiary GPM je minimálna.

b) Určte body P strany AD a Q strany CD také, že dĺžka lomenej čiary $GPQM$ je minimálna.

Riešenie:

a) Úloha sa rieši podobne ako úloha N1. Bod P je priesečníkom GM' s AD, pričom M' je bod osovo súmerný s M podľa priamky AD.

b) Nech P je ľubovoľný bod AD a Q ľubovoľný bod CD. Nech M', C', Q' sú body súmerne združené postupne s M, C, Q podľa priamky AD. Zo symetrie platí $|PQ'| = |PQ|$ a $|Q'M'| = |QM|$. Ďalej nech M'' je bod súmerne združený s M' podľa CD. Zo symetrie platí $|Q'M'| = |Q'M''|$, pretože Q' leží na CD. Dĺžka lomenej čiary $GPQM$ je tak rovná dĺžke lomenej čiary $GPQ'M''$, ktorá bude minimálna práve vtedy, keď P a Q' budú priesečníkmi priamky GM'' postupne so stranami AD a CD. Tým sme zostrojili hľadaný bod P a bod Q'. Hľadaný bod Q je obrazom bodu Q' v osovej súmernosti podľa priamky AD. Z polohy bodu G je zrejmé, že Q' bude ležať na úsečke $C'D$, a preto bod Q bude ležať na úsečke CD.



D1 Je daný uhol XOY, ktorého veľkosť je menšia ako 45°, a bod A na polpriamke OX. Nájdite body M a N polpriamok postupne OY, OX, pre ktoré je hodnota $|AM| + |MN|$ najmenší.

Riešenie:

Nech N leží na polpriamke OX ľubovoľne. Ďalej nech OX' je polpriamka súmerne združená s polpriamkou OX podľa priamky OY a označme N' bod osovo súmerný s N podľa priamky OY. Označme d vzdialenosť bodu A od priamky OX'. Potom platí $|AM| + |MN| = |AM| + |MN'| \geq d$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď N' bude kolmým priemetom bodu A na polpriamku OX' a bod M bude ležať na úsečke AN'. Keďže $|\sphericalangle XOY| < 45°$, platí $|\sphericalangle XOX'| = 2 \cdot |\sphericalangle XOY| < 90°$, takže kolmý priemet bodu A na priamku OX' leží na polpriamke OX'. Hľadaný bod M je preto priesečníkom úsečky AN' s polpriamkou OY, pričom N' je kolmý priemet bodu A na polpriamku OX' a hľadaný bod N je bod osovo súmerný s bodom N' podľa priamky OY.

D2 Nech XOY je konvexný uhol a M jeho vnútorný bod. Nájdite body A a B polpriamok OX, resp. OY také, že $|OA| = |OB|$ a hodnota $|MA| + |MB|$ je najmenšia.

Riešenie:

Nech M' je obrazom bodu M v otočení so stredom v bode O o uhol $|\sphericalangle XOY|$ v kladnom smere. Nech A a B sú body na polpriamkach OX, resp. OY také, že platí $|OA| = |OB|$. Potom platí $|\sphericalangle AOM| = |\sphericalangle XOY| - |\sphericalangle MOB| = |\sphericalangle BOM'|$. Zároveň platí $|OM| = |OM'|$. Trojuholníky AOM a BOM' sú tak zhodné podľa vety *sus*, takže $|AM| = |BM'|$. Teda $|MA| + |MB| = |M'B| + |BM| \geq |M'M|$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď bod B leží na MM'. Keďže uhol MOM' je konvexný, úsečka MM' pretína polpriamku OY, pričom tento priesečník je hľadaným bodom B. Hľadaný bod A už ľahko nájdeme ako bod na polpriamke OX taký, že $|OA| = |OB|$.

D3 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Dokážte, že existuje bod P taký, že ak K, L, M obrazy ľubovoľného vnútorného bodu ABC v osových súmernostiach postupne podľa priamok BC, CA, AB, tak P leží v trojuholníku KLM.

Riešenie:

Úloha MO 70-A-III-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3576#page=8).

---

6 N1 Platí tvrdenie súťažnej úlohy, ak namiesto 97 je

a) 5,

b) 7?

Riešenie:

Pre obe čísla 5 i 7 tvrdenie upravenej úlohy platí. Pre číslo 5 tvrdenie by dokonca platilo, aj keby na tabuli boli napísané iba 3 prirodzené čísla.

N2 Nech p je prvočíslo a a celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom p. Dokážte, že

$$\{(xa) \bmod p\colon x \in \{1, \dots, p-1\}\} = \{1, \dots, p-1\}.$$

Riešenie:

Ukážeme, že zobrazenie f z z $\{0, \dots, p-1\}$ do $\{0, \dots, p-1\}$ také, že $f(x) = (xa) \bmod p$, je prosté:

Nech $f(x_1) = f(x_2)$, t. j. $(x_1 a) \bmod p = (x_2 a) \bmod p$, a teda p delí $x_1 a - x_2 a$ čiže $(x_1 - x_2)a$. Keďže a nie je deliteľné p, číslo p delí $x_1 - x_2$. A pretože $|x_1 - x_2| < p$, platí $|x_1 - x_2| = 0$, t. j. $x_1 = x_2$. Z toho

$$\{(xa) \bmod p\colon x \in \{0, \dots, p-1\}\} = \{0, \dots, p-1\}.$$

A keďže $0a \bmod p = 0$, tvrdenie úlohy platí.

N3 Nech p je prvočíslo a a celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom p. Dokážte, že existuje práve jeden zvyšok b, pre ktorý platí $(ab) \bmod p = 1$.

Riešenie:

Tvrdenie priamo vyplýva z tvrdenia úlohy N2.

N4 Dokážte *(malú) Fermatovu vetu*: Nech p je prvočíslo a a celé číslo, ktoré nie je deliteľné číslom p. Potom p delí číslo $a^{p-1} - 1$.

Riešenie:

Chceme ukázať, že platí $1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}$.

Podľa úlohy N2 platí $(1a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a) \bmod p = (1 \cdot \dots \cdot (p-1)) \bmod p$, takže

$$p \mid (1a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (p-1)a) - (1 \cdot \dots \cdot (p-1)) = (p-1)!a^{p-1} - (p-1)! = (p-1)!\left(a^{p-1} - 1\right),$$

a keďže $(p-1)!$ nie je deliteľné p, platí $p \mid a^{p-1} - 1$.

N5 Nech p je prvočíslo a a, b, c sú celé čísla, pričom p nedelí a. Dokážte, že podmienka $p \mid ax^2 + bx + c$ je splnená najviac pre dve rôzne hodnoty x z $\{0, \dots, p-1\}$.

Riešenie:

Nech $p \mid ax^2 + bx + c$ platí pre tri rôzne hodnoty x z $\{0, \dots, p-1\}$, označme ich x_1, x_2, x_3. Potom $p \mid ax_1^2 + bx_1 + c$ a $p \mid ax_2^2 + bx_2 + c$, takže

$$p \mid (ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + b(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(ax_1 + ax_2 + b).$$

Keďže p nedelí $x_1 - x_2$, platí $p \mid ax_1 + ax_2 + b$. Analogicky $p \mid ax_1 + ax_2 + b$, takže

$$p \mid (ax_1 + ax_2 + b) - (ax_1 + ax_3 + b) = a(x_2 - x_3).$$

Ale p nedelí ani a a ani $z - w$, čo je spor.

N6 Dokážte, že číslo $2^{2025} - 8$ je deliteľné 56.

Riešenie:

Mocniny 2 dávajú po delení 56 postupne zvyšky 2, 4, 6, 16, 32, 8, 16, 32, 8, 16, 32, ... Keďže zvyšok nasledujúcej mocniny je jednoznačne určený zvyškom predošlej mocniny, po zvyšku 8 sa bude opakovať už len trojica zvyškov 8, 16, 32. Keďže 2025 je deliteľné 3 a každá mocnina s exponentom deliteľným 3 dáva zvyšok 8, platí

$$(2^{2025} - 8) \bmod 56 = (8 - 8) \bmod 56 = 0 \bmod 56 = 0,$$

takže $2^{2025} - 8$ je deliteľné 56.

D1 Nech p je nepárne prvočíslo. Číslo a z $\{1, \dots, p-1\}$ nazývame *kvadratický zvyšok po delení* p, keď existuje celé číslo x, pre ktoré platí $x^2 \bmod p = a$. Dokážte, že v množine $\{1, \dots, p-1\}$ je kvadratických zvyškov po delení p rovnako veľa ako čísel, ktoré nie sú kvadratickým zvyškom po delení p.

Riešenie:

$p \mid x_1^2 - x_2^2$ platí práve vtedy, keď $p \mid (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, teda práve vtedy, keď $p \mid x_1 - x_2$ alebo $p \mid x_1 + x_2$. Z toho vyplýva, že medzi $1^2 \bmod p$, …, $(p-1)^2 \bmod p$ sa vyskytne každý kvadratický zvyšok práve dvakrát, raz ako $x^2 \bmod p$ a raz ako $(p-x)^2 \bmod p$, pre vhodné x, kde $x < p - x$. Preto sa stačí pozerať len na prvú polovicu, teda na $1^2 \bmod p$, …, $(\frac{p-1}{2})^2 \bmod p$, tieto čísla sú navzájom rôzne, takže kvadratických zvyškov je $\frac{p-1}{2}$, čo je práve polovica zo všetkých nenulových zvyškov.

D2 Dokážte jednu časť *Wilsonovej vety*: Ak p je prvočíslo, tak $p \mid (p-1)! + 1$.

Riešenie:

Podľa úlohy N2 existuje ku každému zvyšku a po delení p zvyšok b taký, že $ab \bmod p = 1$. Pritom platí $a \bmod p = b \bmod p$ práve vtedy, keď $a^2 \bmod p = ab \bmod p$, t. j. $a^2 \bmod p = 1$, t. j. $p \mid a^2 - 1$, t. j. $p \mid (a-1)(a+1)$. t. j. $p \mid a - 1$ alebo $p \mid a + 1$, t. j. $a = 1$ alebo $a = p - 1$. To znamená, že v množine zvyškov $\{1, \dots, p-1\}$ vieme všetky čísla až na 1 a $p - 1$ usporiadať do dvojíc, ktorých súčin dáva po delení p zvyšok 1. Preto platí

$$((p-1)! + 1) \bmod p = (1 \cdot (p-1) + 1) \bmod p = p \bmod p = 0,$$

a teda $p \mid (p-1)! + 1$.

D3 Dokážte, že postupnosť kladných prirodzených čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ taká, že ak n je prirodzené číslo, tak

$$a_{n+1} \in \{2022a_n - 1, 2022a_n + 1\},$$

obsahuje nekonečne veľa zložených čísel.

Riešenie:

Úloha MO 71-A-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3921#page=4).

D4 Určte všetky prirodzené čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s každým členom postupnosti $(2^n + 3^n + 6^n - 1)_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie:

Úloha IMO, 2005, P4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=89#page=5).

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- preklad: Peter Novotný
- recenzent: Stanislav Krajči