MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie B

1

N1 Dokážte, že ak zo 4 čísel majú každé tri rovnaký súčet, tak sú všetky rovnaké.

N2 Päť čísel je napísaných po obvode kruhu tak, že každé tri susedné majú rovnaký súčet. Dokážte, že všetky sú rovnaké.

N3 Šesť čísel je napísaných po obvode kruhu tak, že každé tri susedné majú rovnaký súčet. Najviac koľko najviac z nich môže byť rôznych?

D1 Každej stene kocky priradíme reálne číslo tak, aby všetky vrcholy kocky mali rovnaký súčet čísel na troch priľahlých stenách. Koľko zo šiestich čísel priradených stenám môže byť navzájom rôznych?

D2 Nech a, b, c, d sú reálne čísla také, že

$$a + b + c + d = 0$$

a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Zistite počet rovností spomedzi

$$ab = cd,$$

$$ac = bd,$$

$$ad = bc,$$

ktoré môžu platiť súčasne.

---

2 Keďže pracujeme v kontexte prirodzených čísel, pod deliteľmi tu budeme mať na mysli kladné delitele.

N1 Ktoré z čísel $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 9$, $3^3 \cdot 11^6$, 25^3, $64 \cdot 75$ sú druhé alebo vyššie mocniny prirodzených čísel?

N2 Určte počet deliteľov čísla 90.

N3 Ukážte, že ak je n štvrtá mocnina nenulového prirodzeného čísla, tak súčin deliteľov čísla n je druhá mocnina prirodzeného čísla.

D1 Dokážte, že počet deliteľov čísla $p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$, kde $p_1, \ldots, p_m$ sú prvočísla a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sú nenulové prirodzené čísla, je $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$.

D2 Ktoré nenulové prirodzené číslo má tú vlastnosť, že súčin všetkých jeho deliteľov je jeho druhá mocnina?

D3 Nech p a q sú prvočísla a α a β sú prirodzené čísla. Vyjadrite súčet a súčin všetkých deliteľov čísla $p^\alpha q^\beta$ pomocou p, q, α, β.

D4 Nájdite podiel súčtu všetkých párnych deliteľov a súčtu všetkých nepárnych deliteľov prirodzeného čísla takého, že počet všetkých jeho párnych deliteľov je o 3 väčší ako počet všetkých jeho nepárnych deliteľov.

D5 Nájdite každé nenulové prirodzené číslo také, že súčin všetkých jeho deliteľov je 20^{15}.

3

N1 Pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe zostrojte rovnobežku k priamke bodom, ktorý na nej neleží.

N2 Dokážte, že os uhla ABC trojuholníka ABC pretne jemu opísanú kružnicu v strede jej oblúka s krajnými bodmi B a C neobsahujúceho bod A.

D1 Dokážte, že os vonkajšieho uhla pri vrchole A trojuholníka ABC pretne jemu opísanú kružnicu v strede jej oblúka s krajnými bodmi B a C obsahujúceho bod A.

D2 K danej kružnici zostrojte stred iba pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe.

D3 Nech X a Y sú rôzne body. Iba pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe zostrojte obraz bodu X podľa bodu Y.

D4 Daná je kružnica s polomerom 1. Iba pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{13}$.

D5 Máme pravítko bez mierky, ktoré nám umožňuje viesť dvomi danými bodmi priamku a spraviť kolmicu na danú priamku v jej danom bode. Zistite, či vieme týmto nástrojom zostrojiť kolmicu na danú priamku z daného bodu ležiaceho mimo tejto priamky.

4

N1 Dokážte nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (tzv. A-G nerovnosť) nezáporných reálnych čísel a a b

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

a určte, kedy v nej nastáva rovnosť.

N2 Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $a+b$, kde a a b sú kladné reálne čísla také, že $ab = 10$, a zistite, pre aké a a b sa nadobúda.

N3 Nech K je reálne číslo. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu ab, kde a a b sú reálne čísla také, že $a+b = K$, a zistite, pre aké a a b sa nadobúda.

D1 Nech a a b sú čísla z intervalu $[1, \infty)$. Dokážte, že

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) - (a-1)^2(b-1)^2 \geq 4,$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

D2 Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

a nájdite hodnotu x, pri ktorej ju nadobúda.

D3 Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel také, že

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

D4 Nájdite najmenšie reálne číslo k také, že ak a a b sú kladné reálne čísla, tak

$$k\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2 + ab.$$

5

N1 Nech ABC je trojuholník a P jeho vnútorný bod taký, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$, $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Dokážte, že priamka AP je kolmá na priamku BC.

N2 Nech ABC je trojuholník a M, N, P postupne stredy jeho strán BC, CA, AB. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka MNP je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC.

D1 Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD a P je priesečník jeho uhlopriečok. Nech sa ich osi pretínajú v bode M ležiacom na jeho základni AB. Dokážte, že priamka MP je osou uhla CMD.

D2 Nech $ABCD$ je rovnobežník a L stred jeho strany CD, pričom BL je os uhla ABC. Dokážte, že priamky AL a BL sú navzájom kolmé.

D3 Nech ABC je trojuholník a D je priesečník osi uhla BAC a strany BC. Nech M je bod strany AB taký, že MD a AC sú rovnobežné. Dokážte, že $|AM| = |DM|$.

D4 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC Nech D a E sú vnútorné body jeho strán AB, resp. AC také, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Nech F je bod taký, že $ABFC$ je rovnobežník. Dokážte, že $|FD| = |FE|$.

6

N1 Vyjadrite všeobecne vzdialenosť stredov dvoch rôznych políčok na rovnakom riadku hracej plochy a odvoďte z výsledku, že to nie sú racionálne (a teda ani celé) čísla.

N2 Figúrka stojí

a) na stredovom políčku,

b) v pravom hornom rohu

hracej plochy. Na ktoré políčka dokáže doskákať konečným počtom skokov?

N3 Dokážte, že na šachovnici 8×8 je možné umiestniť najviac 16 kráľov tak, aby sa navzájom neohrozovali.

D1 Určte najväčší možný počet strelcov, ktoré môžeme spolu so 4 vežami umiestniť na šachovnici 8×8 tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali.

D2 Aký najväčší počet strelcov je možné umiestniť na biele políčka šachovnice 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali?

D3 Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra sa končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

D4 Na pláne 5×5 hráme hru lode. Loď je vytvorená zo 4 políčok v tvare písmena L a môže byť ľubovoľne natočená alebo preklopená. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra sa končí.

a) Navrhnite 8 políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode.

b) Dokážte, že žiadnych 7 otázok takú istotu nedáva.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie B

1

N1 Dokážte, že ak zo 4 čísel majú každé tri rovnaký súčet, tak sú všetky rovnaké.

Riešenie:

Označme čísla x_1, x_2, x_3, x_4. Podľa predpokladu $x_1 + x_3 + x_4 = x_2 + x_3 + x_4$, takže $x_1 = x_2$.

Analogicky platí $x_1 = x_3$ a $x_1 = x_4$.

N2 Päť čísel je napísaných po obvode kruhu tak, že každé tri susedné majú rovnaký súčet. Dokážte, že všetky sú rovnaké.

Riešenie:

Označme čísla postupne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Potom platí

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_1) = (x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_1 + x_2),$$

z čoho $2x_1 = 2x_2$, t. j. $x_1 = x_2$.

Analogicky platí $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$, $x_4 = x_5$.

N3 Šesť čísel je napísaných po obvode kruhu tak, že každé tri susedné majú rovnaký súčet. Najviac koľko najviac z nich môže byť rôznych?

Riešenie:

Označme čísla postupne $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Potom $x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4$, z čoho vyplýva $x_1 = x_4$. Analogicky $x_2 = x_5$ a $x_3 = x_6$, takže čísla sú najvic 3 rôzne.

Túto hodnotu môžeme dosiahnuť napríklad šesticou $(1, 2, 3, 1, 2, 3)$.

D1 Každej stene kocky priradíme reálne číslo tak, aby všetky vrcholy kocky mali rovnaký súčet čísel na troch priľahlých stenách. Koľko zo šiestich čísel priradených stenám môže byť navzájom rôznych?

Riešenie:

Z podmienky aplikovanej na dva susedné vrcholy dostaneme, že na protiľahlých stenách kocky sú rovnaké čísla.

Naopak, nech na hornej a dolnej stene bude číslo a, na ľavej a pravej b a na prednej a zadnej c, potom pri každom vrchole bude súčet $a + b + c$.

Z čísel a, b, c, a teda aj z čísel na stenách kocky, môžu byť rôzne 1, 2, alebo 3.

D2 Nech a, b, c, d sú reálne čísla také, že

$$a + b + c + d = 0$$

a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Zistite počet rovností spomedzi

$$ab = cd,$$
$$ac = bd,$$
$$ad = bc,$$

ktoré môžu platiť súčasne.

Riešenie:

Úloha 74-A-III-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=5396).

2 Keďže pracujeme v kontexte prirodzených čísel, pod deliteľmi tu budeme mať na mysli kladné delitele.

N1 Ktoré z čísel $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 9$, $3^3 \cdot 11^6$, 25^3, $64 \cdot 75$ sú druhé alebo vyššie mocniny prirodzených čísel?

Riešenie:

Nenulové prirodzené číslo je k. mocnina práve vtedy, keď všetky exponenty prvočísel v jeho prvočíselnom rozklade sú násobky k.

- Keďže $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 9 = 2^{10} \cdot 7^4 \cdot 3^2 = (2^5 \cdot 7^2 \cdot 3)^2$, je to 2., ale nie žiadna vyššia mocnina.
- $3^3 \cdot 11^6$ je (iba) 3. mocninou.
- Keďže $25^3 = 5^6$, je to 6., a teda aj 2. a 3. mocnina.
- Keďže $32 \cdot 125 = 2^5 \cdot 5^3$, nie je to 2. ani žiadna vyššia mocnina.

N2 Určte počet deliteľov čísla 90.

Riešenie:

Keďže $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ a 2, 3, 5 sú prvočísla, všetky delitele 90 sú:

- $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0$ čiže 1,
- $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1$ čiže 5,
- $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0$ čiže 3,
- $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ čiže 15,
- $2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0$ čiže 9,
- $2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ čiže 45,
- $2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0$ čiže 2,
- $2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1$ čiže 10,
- $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0$ čiže 6,
- $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ čiže 30,
- $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0$ čiže 18,
- $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ čiže 90.

Je ich teda $2 \cdot 3 \cdot 2$ čiže 12.

N3 Ukážte, že ak je n štvrtá mocnina nenulového prirodzeného čísla, tak súčin deliteľov čísla n je druhá mocnina prirodzeného čísla.

Riešenie:

Označme τ počet deliteľov n. Rozdelením týchto deliteľov do dvojíc $(d, n/d)$ so súčinom $n = a^4$ rovnako ako v riešení súťažnej úlohy sa jediný z nich páruje sám so sebou, a to $\sqrt{n} = a^2$. Celkový súčin je teda rovný

$$a^2 \cdot (a^4)^{\frac{\tau-1}{2}} = (a^2)^\tau = (a^\tau)^2,$$

čo je druhá mocnina.

D1 Dokážte, že počet deliteľov čísla $p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$, kde $p_1, \dots, p_m$ sú prvočísla a $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sú nenulové prirodzené čísla, je $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$.

Riešenie:

Prvočíselný rozklad ľubovoľného deliteľa nejakého čísla neobsahuje iné prvočísla ako toto číslo, a to s rovnakými alebo nižšími exponentmi. Určenie týchto exponentov jednoznačne určuje deliteľa a rôzne voľby exponentov dávajú rôzne delitele. Keďže pri prvočísle p_i máme na výber $\alpha_i + 1$ exponentov, a to $0, \dots, \alpha_i$, a exponenty rôznych prvočísel môžeme voliť nezávisle (t. j. máme k dispozícii všetky kombinácie), počet deliteľov je $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$.

D2 Ktoré nenulové prirodzené číslo má tú vlastnosť, že súčin všetkých jeho deliteľov je jeho druhá mocnina?

Riešenie:

Rozoberme prípady:

- Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} m$, kde p_1, p_2, p_3 sú prvočísla, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sú nenulové prirodzené čísla a m je nenulové prirodzené číslo.

  Všetky čísla tvaru $p_1^{\alpha_1} d$, kde d je deliteľ $p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$, sú delitele n. Z úlohy D1 vieme, že takýchto deliteľov je $(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)$, takže v súčine všetkých deliteľov n sa p_1 vyskytuje s exponentom aspoň $(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\alpha_1$. Toto číslo je však aspoň $(1 + 1)(1 + 1)\alpha_1$ čiže $4\alpha_1$, avšak p_1 delí n^2 v mocnine $2\alpha_1$, čo je menej.

  Takéto n teda podmienke nevyhovuje.
- Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, kde p_1, p_2 sú prvočísla a α_1, α_2 sú nenulové prirodzené čísla.

  Všetky čísla tvaru $p_1^{\alpha_1} d$, kde d je deliteľ $p_2^{\alpha_2}$, sú delitele n. Z úlohy D1 vieme, že takýchto deliteľov je $\alpha_2 + 1$, takže v súčine všetkých deliteľov n sa p_1 vyskytuje s exponentom aspoň $(\alpha_2 + 1)\alpha_1$. Keďže však p_1 delí n^2 v mocnine $2\alpha_1$, platí $(\alpha_2 + 1)\alpha_1 \leq 2\alpha_1$, t. j. $\alpha_2 \leq 1$, takže $\alpha_2 = 1$.

  Analogicky $\alpha_1 = 1$, takže $n = p_1 p_2$. Všetky delitele n sú potom $1, p_1, p_2, p_1 p_2$, takže ich súčin je $(p_1 p_2)^2$ čiže naozaj n^2.

Takéto n teda podmienke vyhovuje.

- Nech $n = p_1^{\alpha_1}$, kde p_1 je prvočíslo a α_1 je prirodzené číslo.

  Jeho delitele sú čísla $p_1^0, p_1^{\alpha_1}$, ich súčin je $p_1^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}}$. Keďže $n^2 = p_1^{2\alpha_1}$, platí $\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} = 2\alpha_1$, t. j. $\alpha_1 = 0$ alebo $\alpha_1 = 3$, a teda $n = 1$ alebo $n = p_1^3$.

  V prvom prípade je deliteľ jediný, a to 1, čo je naozaj n^2. V druhom prípade sú delitele práve $1, p_1, p_1^2, p_1^3$, ich súčin je p_1^6, čo je naozaj n^2.

  Takéto n teda podmienke vyhovujú.

Vyhovujú teda práve čísla 1, p_1p_2, kde p_1 a p_2 sú rôzne prvočísla, a p_1^3, kde p_1 je prvočíslo.

D3 Nech p a q sú prvočísla a α a β sú prirodzené čísla. Vyjadrite súčet a súčin všetkých deliteľov čísla $p^\alpha q^\beta$ pomocou p, q, α, β.

Riešenie:

- Súčet je

$$\left(p^0 + \cdots + p^\alpha\right)\left(q^0 + \cdots + q^\beta\right),$$

  lebo po jeho roznásobení dostávame súčet všetkých sčítancov tvaru $p^i q^j$, kde $i \in \{0, \dots, \alpha\}$ a $j \in \{0, \dots, \beta\}$, čo sú práve delitele čísla $p^\alpha q^\beta$.

  Výsledok sa dá vyjadriť aj v „bezbodkovom“ tvare

$$\frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}.$$

- Delitele čísla $p^\alpha q^\beta$ sú práve $p^i q^j$, kde $i \in \{0, \dots, \alpha\}$ a $j \in \{0, \dots, \beta\}$. Pritom

$$\left(p^0q^0 \cdot \cdots p^0q^\beta\right) \cdot \cdots \cdot \left(p^\alpha q^0 \cdot \cdots p^\alpha q^\beta\right) = \left(\left(p^0\right)^{\beta+1} \cdot q^{0+\cdots+\beta}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\left(p^\alpha\right)^{\beta+1} \cdot q^{0+\cdots+\beta}\right)$$

$$= \left(\left(p^0\right)^{\beta+1} \cdot \cdots \cdot \left(p^\alpha\right)^{\beta+1}\right) \cdot \left(q^{0+\cdots+\beta}\right)^{\alpha+1} = \left(p^0 \cdot \cdots \cdot p^\alpha\right)^{\beta+1} \cdot \left(q^{0+\cdots+\beta}\right)^{\alpha+1}$$

$$= \left(p^{0+\cdots+\alpha}\right)^{\beta+1} \cdot \left(q^{0+\cdots+\beta}\right)^{\alpha+1} = \left(p^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)}\right)^{\beta+1} \cdot \left(q^{\frac{1}{2}\beta(\beta+1)}\right)^{\alpha+1}$$

$$= \left(p^\alpha\right)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)} \cdot \left(q^\beta\right)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)} = \left(p^\alpha q^\beta\right)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)}.$$

D4 Nájdite podiel súčtu všetkých párnych deliteľov a súčtu všetkých nepárnych deliteľov prirodzeného čísla takého, že počet všetkých jeho párnych deliteľov je o 3 väčší ako počet všetkých jeho nepárnych deliteľov.

Riešenie:

Úloha MO 65-B-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1745#page=6).

D5 Nájdite každé nenulové prirodzené číslo také, že súčin všetkých jeho deliteľov je 20^{15}.

Riešenie:

Úloha MO 64-B-II-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1371).

3

N1 Pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe zostrojte rovnobežku k priamke bodom, ktorý na nej neleží.

Riešenie:

Označme túto priamku p a tento bod X. Najprv zostrojíme kolmicu q na priamku p prechádzajúcu bodom X. Potom zostrojíme kolmicu na priamku q prechádzajúcu bodom X. To je hľadaná rovnobežka.

N2 Dokážte, že os uhla ABC trojuholníka ABC pretne jemu opísanú kružnicu v strede jej oblúka s krajnými bodmi B a C neobsahujúceho bod A.

Riešenie:

Tvrdenie vyplýva priamo z vety o obvodových uhloch.

K tejto téme odporúčame napr. študijný text https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/tkadlec.pdf.

D1 Dokážte, že os vonkajšieho uhla pri vrchole A trojuholníka ABC pretne jemu opísanú kružnicu v strede jej oblúka s krajnými bodmi B a C obsahujúceho bod A.

Riešenie:

Keďže os vonkajšieho uhla je kolmá na os príslušného vnútorného uhla, z Tálesovej vety dostaneme, že priesečník osi vonkajšieho uhla pri A pretne opísanú kružnicu v bode, ktorý je spolu so stredom oblúka s krajnými bodmi B a C neobsahujúceho bod A krajný bod toho istého priemeru, a je to teda (napr. zo symetrie kružnice) stred druhého oblúka s krajnými bodmi B a C.

D2 K danej kružnici zostrojte stred iba pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe.

Riešenie:

Zvoľme si na kružnici ľubovoľné dva rôzne body A a B. Bodom B veďme kolmicu na priamku AB. Jej priesečník s kružnicou podľa možnosti rôzny od bodu B označíme C. Potom AC je priemer kružnice.

Analogicky zostrojíme jej iný priemer. Priesečník týchto priemerov je potom jej hľadaný stred.

D3 Nech X a Y sú rôzne body. Iba pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe zostrojte obraz bodu X podľa bodu Y.

Riešenie:

Pomocou kolmíc skonštruujeme obdĺžnik $XYZW$. Hľadaný obraz je potom priesečník priamky XY a rovnobežky s jeho uhlopriečkou WY cez bod Z.

D4 Daná je kružnica s polomerom 1. Iba pomocou prostriedkov povolených v súťažnej úlohe zostrojte úsečku dĺžky $\sqrt{13}$.

Riešenie:

Podľa úlohy D2 zostrojme stred S tejto kružnice.

Nech A_1 je ľubovoľný jej bod. Podľa úlohy D3 zostrojme bod A_2 stredovo súmerný s S podľa A_1 a bod A_3 stredovo súmerný s A_1 podľa A_2. Potom $|SA_3| = 3$.

Nech B_1 je priesečník kružnice a kolmice na priamku SA_1 cez bod S. Podľa úlohy D3 zostrojme bod B_2 stredovo súmerný s S podľa B_1. Potom $|SB_2| = 2$.

Potom podľa Pytagorovej vety

$$|A_3B_2| = \sqrt{|SA_3|^2 + |SB_2|^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

D5 Máme pravítko bez mierky, ktoré nám umožňuje viesť dvomi danými bodmi priamku a spraviť kolmicu na danú priamku v jej danom bode. Zistite, či vieme týmto nástrojom zostrojiť kolmicu na danú priamku z daného bodu ležiaceho mimo tejto priamky.

Riešenie:

KMS 2010/11, 2. zimná séria, úloha 7
(https://old.kms.sk/docs/vzoraky/20102011/zim/seria2.pdf?s=2&t=zim&r=2010#page=4).

4

N1 Dokážte nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (tzv. A-G nerovnosť) nezáporných reálnych čísel a a b

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

a určte, kedy v nej nastáva rovnosť.

Riešenie:

Vďaka nezápornosti existujú čísla $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$, takže dokazovanú nerovnosť je možné ekvivalentne prepísať na tvar $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Táto nerovnosť zrejme platí a rovnosť v nej nastáva, práve keď $a = b$.

N2 Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $a + b$, kde a a b sú kladné reálne čísla také, že $ab = 10$, a zistite, pre aké a a b sa nadobúda.

Riešenie:

Z A-G nerovnosti máme $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{10}$ a rovnosť nastáva práve v prípade $a = b = \sqrt{10}$.

N3 Nech K je reálne číslo. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu ab, kde a a b sú reálne čísla také, že $a+b = K$, a zistite, pre aké a a b sa nadobúda.

Riešenie:

Nech $d = a - \frac{K}{2}$, potom $d = \frac{K}{2} - b$. Z toho

$$ab = \left(\frac{K}{2} + d\right)\left(\frac{K}{2} - d\right) = \frac{K^2}{4} - d^2 \geq \frac{K^2}{4}.$$

Rovnosť nastáva práve v prípade $d = 0$, čiže keď $a = b = \frac{K}{2}$.

D1 Nech a a b sú čísla z intervalu $[1, \infty)$. Dokážte, že

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) - (a-1)^2(b-1)^2 \geq 4,$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

Riešenie:

Úloha MO 59-C-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=320).

D2 Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

a nájdite hodnotu x, pri ktorej ju nadobúda.

Riešenie:

Úloha MO 64-B-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1371).

D3 Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel také, že

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

Riešenie:

Úloha MO 63-B-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1008).

D4 Nájdite najmenšie reálne číslo k také, že ak a a b sú kladné reálne čísla, tak

$$k\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2 + ab.$$

Riešenie:

Úloha MO 70-B-II-1b (https://skmo.sk/dokument.php?id=3604).

5

N1 Nech ABC je trojuholník a P jeho vnútorný bod taký, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$, $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Dokážte, že priamka AP je kolmá na priamku BC.

Riešenie:

Nech Q je priesečník priamky BP a strany AC. Potom $|\sphericalangle BQC| = 180° - (40° + 20° + 30°) = 90°$, takže BP je priamka výšky trojuholníka ABC z bodu B.

Analogicky je CP je priamka jeho výšky z bodu C, takže P je jeho ortocentrum. Preto je aj priamka AP jeho výška, a teda je kolmá na priamku BC.

N2 Nech ABC je trojuholník a M, N, P postupne stredy jeho strán BC, CA, AB. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka MNP je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Riešenie:

Osi strán trojuholníka ABC splývajú s výškami v trojuholníku MNP.

D1 Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD a P je priesečník jeho uhlopriečok. Nech sa ich osi pretínajú v bode M ležiacom na jeho základni AB. Dokážte, že priamka MP je osou uhla CMD.

Riešenie:

Trojuholník BMD je rovnoramenný so základňou BD, takže platí $|\sphericalangle MDB| = |\sphericalangle MBD| = |\sphericalangle CDB|$, pričom posledná rovnosť vyplýva z rovnobežnosti základní lichobežníka AB a CD. DP je teda os uhla CDM.

Analogicky je priamka CP je os uhla DCM. Bod P ako ich priesečník je stredom kružnice vpísanej do trojuholníka CDM, a teda priamka MP je os uhla CMD.

D2 Nech $ABCD$ je rovnobežník a L stred jeho strany CD, pričom BL je os uhla ABC. Dokážte, že priamky AL a BL sú navzájom kolmé.

Riešenie:

Úloha MO 71-C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3929).

D3 Nech ABC je trojuholník a D je priesečník osi uhla BAC a strany BC. Nech M je bod strany AB taký, že MD a AC sú rovnobežné. Dokážte, že $|AM| = |DM|$.

Riešenie:

Priamka AD je os uhla pri vrchole BAC, takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle MAD|$. Okrem toho uhly CAD a MDA sú striedavé, pretože sú MD a AC rovnobežné. Trojuholník AMD je teda rovnoramenný a $|AM| = |DM|$.

D4 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC Nech D a E sú vnútorné body jeho strán AB, resp. AC také, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Nech F je bod taký, že $ABFC$ je rovnobežník. Dokážte, že $|FD| = |FE|$.

Riešenie:

Úloha MO 71-B-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3924).

6

N1 Vyjadrite všeobecne vzdialenosť stredov dvoch rôznych políčok na rovnakom riadku hracej plochy a odvoďte z výsledku, že to nie sú racionálne (a teda ani celé) čísla.

Riešenie:

Sú to párne násobky dĺžky výšky v rovnostrannom trojuholníku so stranou 1, t. j. čísla tvaru $\sqrt{3}k$, kde k je nenulové prirodzené číslo. Takéto čísla sú však racionálne.

N2 Figúrka stojí

a) na stredovom políčku,
b) v pravom hornom rohu

hracej plochy. Na ktoré políčka dokáže doskákať konečným počtom skokov?

Riešenie:

Políčka je možné rozdeliť na tri disjunktné skupiny tak, že stredy políčok v každej z nich tvoria sieť tvorenú rovnostrannými trojuholníkmi. Potom sa figúrka stojaca na ľubovoľnom políčku môže opakovanými skokmi dostať iba na políčka z tej istej skupiny.

N3 Dokážte, že na šachovnici 8×8 je možné umiestniť najviac 16 kráľov tak, aby sa navzájom neohrozovali.

Riešenie:

Šachovnicu rozdelíme na 16 štvorcov 2×2, na každý z nich môžeme umiestniť najviac jedného kráľa.

D1 Určte najväčší možný počet strelcov, ktoré môžeme spolu so 4 vežami umiestniť na šachovnici 8×8 tak, aby sa strelci navzájom neohrozovali.

Riešenie:

Úloha MO 69-B-I-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3387).

D2 Aký najväčší počet strelcov je možné umiestniť na biele políčka šachovnice 8×8 tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Riešenie:

Na šachovnici je 7 diagonál rovnobežných s bielou hlavnou diagonálou, na každú môžeme umiestniť najviac jedného strelca.

Vyhovujúce umiestnenie 7 strelcov je napríklad také, že budú v počtoch 4 a 3 v krajných stĺpcoch šachovnice.

D3 Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra sa končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.

Riešenie:

Úloha MO 58-B-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=29#page=5).

D4 Na pláne 5×5 hráme hru lode. Loď je vytvorená zo 4 políčok v tvare písmena L a môže byť ľubovoľne natočená alebo preklopená. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra sa končí.

a) Navrhnite 8 políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode.
b) Dokážte, že žiadnych 7 otázok takú istotu nedáva.

Riešenie:

Úloha MO 58-B-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=35).

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- preklad: Peter Novotný
- recenzent: Stanislav Krajči