

2024/2025

74. ročník Matematickej olympiády

Zadania úloh IMO

(Súťaž sa konala 14. – 19. 7. 2025.)

1. Priamku v rovine nazveme *slnečná*, keď nie je rovnobežná ani s x -ovou osou, ani s y -ovou osou, ani s priamkou s rovnicou $x + y = 0$. Nech n je celé číslo také, že $n \geq 3$. Určte všetky nezáporné celé čísla k také, že existuje n rôznych priamok v rovine takých, že platí:

- Pre všetky kladné celé čísla a a b také, že $a + b \leq n + 1$, bod (a, b) leží aspoň na jednej z nich.
- Práve k z nich je slnečných.

(USA)

2. Nech Ω a Γ sú kružnice so stredmi M , resp. N také, že polomer Ω je menší než polomer Γ . Predpokladajme, že kružnice Ω a Γ sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch A a B . Priamka MN pretína Ω v bode C a Γ v bode D , pričom body C , M , N , D ležia na priamke v takomto poradí. Nech P je stred kružnice opísanej trojuholníku ACD . Priamka AP pretína kružnicu Ω ešte v bode E rôznom od A a kružnicu Γ ešte v bode F rôznom od A . Nech H je ortocentrum trojuholníka PMN . Dokážte, že priamka prechádzajúca cez bod H a rovnobežná s AP je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku BEF .

Poznámka. Ortocentrom trojuholníka nazývame priesečník jeho výšok. (Vietnam)

3. Funkcia f , kde $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, sa nazýva *senza*, ak pre všetky kladné celé čísla a a b platí, že

$$f(a) \text{ je deliteľom } b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Určte najmenšiu reálnu konštantu c takú, že pre každú senza funkciu f a každé kladné celé číslo n platí $f(n) \leq cn$.

Poznámka. $\mathbb{N}^+$ je množina kladných celých čísel. (Kolumbia)

4. Pod *vlastným deliteľom* kladného celého čísla m rozumieme kladný deliteľ čísla m rôzny od m . Nekonečná postupnosť $(a_1, a_2, \dots)$ je zložená z kladných celých čísel, z ktorých každé má aspoň tri vlastné delitele. Pre každé kladné celé číslo n je číslo a_{n+1} súčtom troch najväčších vlastných deliteľov čísla a_n . Určte všetky možné hodnoty a_1 . (Litva)

5. Alica a Baltazár hrajú *nekoaličnú hru* pre dvoch hráčov, ktorej pravidlá závisia od kladného reálneho čísla λ , ktoré je obom hráčom známe. V n . ťahu hry (počnúc 1.) sa stane toto:

- Ak n je nepárne, Alica zvolí nezáporné reálne číslo x_n také, že

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Ak n je párne, Baltazár zvolí nezáporné reálne číslo x_n také, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Ak hráč nemôže zvoliť vhodné číslo x_n , hra sa končí a protihráč vyhráva. Ak hra pokračuje donekonečna, nevyhrá nikto. Všetky zvolené čísla sú známe obom hráčom. Určte všetky hodnoty λ také, že Alica má vyhrávajúcu stratégiu, a aj všetky také, že Baltazár má vyhrávajúcu stratégiu. (Taliansko)

6. Matilda chce do mriežky z 2025×2025 jednotkových štvorcov umiestniť niekoľko pravouhelníkových dlaždíc (prípadne aj rôznej veľkosti) tak, že každá strana každej dlaždice leží na niektorej úsečke mriežky a každý jednotkový štvorec je pokrytý najviac jednou dlaždicou. Určte najmenší počet dlaždíc, ktoré Matilda potrebuje umiestniť tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci bol práve jeden nepokrytý štvorec. (Singapur)