
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Zadania úloh domácej prípravy kategórie A (maďarská verzia)

- 1 Egy sziget néhány királyságra van felosztva. Mindegyik királyság alakja egy-egy olyan konvex sokszög, amelynek pontosan egy legészakibb, egy legdélibb, egy legkeletibb és egy legnyugatibb pontja van. Minden király kapott 4 zászlót az É, D, K, NY feliratokkal, amiket kitűztek királyságuk ezen legszélső pontjaira. (Például az ábrán kijelölt pontba, ami három ország találkozási pontja, 2 zászló van kitűzve a zölddel jelölt királyságból, mégpedig a D és K feliratúak, míg a többi királyságból egy zászló sincs kitűzve.) A sziget belsejében van egy vakondtúrás, ahol 7 ország határa találkozik. Határozzátok meg a vakondtúrásba szúrt zászlók számának összes lehetséges értékét.



(Josef Tkadlec)

- 2 Legyenek p és q olyan valós számok, hogy az x ismeretlenes

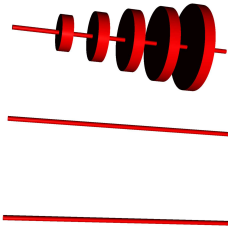
$$|x^2 - 1| = px + q$$

egyenletet pontosan 4 páronként különböző valós szám elégítse ki.

- a) Határozzátok meg a 4 szám összegének összes lehetséges értékét.
b) Bizonyítsátok be, hogy a négy szám szorzata a $(-3, 1)$ intervallumba esik.

(Patrik Bak)

- 3 Egy fejtörő három vízszintes tengelyből és $n \geq 2$ a tengelyekre húzható különböző méretű korongokból áll, melyek a fejtörő kezdőállapotában az első tengelyen vannak nagyság szerint növekvő sorrendben elrendezve. Egy lépésben egy tetszőleges tengely végéről áthelyezhetjük a szélső korongot (akár a bal, akár a jobb oldalt), egy másik tengely azonos végére. A fejtörő akkor van megoldva, ha az összes korong a kezdőállapotnak megfelelő sorrendben van elhelyezve a második tengelyen. Határozzátok meg a fejtörő megoldásához szükséges legkisebb lépésszámot n függvényében.



(Jozef Rajník)

- 4 Legyenek a és b olyan relatív prím természetes számok, hogy $a^3 - 1$ és $b^3 - 1$ szintén relatív prímek. Bizonyítsátok be, hogy ekkor az $a^2 - b$ és $b^2 - a$ számok szintén relatív prímek.

(Patrik Bak)

- 5 Egy hegyesszögű ABC háromszög belsejében adott az R pont. Az AB illetve BC oldalon fekszik a P illetve Q pont úgy, hogy a PQR háromszög kerülete a lehető legkisebb. Hasonlóan a BC illetve AC oldalon fekszik rendre az S illetve T pont úgy, hogy az RST háromszög kerülete a lehető legkisebb. A PQ és ST egyenesek a K pontban metszik egymást. Tegyük fel, hogy $|\angle BAK| = |\angle CAR|$ teljesül. Bizonyítsátok be, hogy a PQR és RST háromszögek kerülete megegyezik.

(Michal Pecho)

- 6 Egy táblára fel van írva 4 természetes szám. A következő lépéseket végezzük: Kiválasztunk egyet a táblán lévő számok közül, letöröljük a választott számot, és helyére a négyzetét írjuk. Elérhető-e mindig véges sok lépéssel egy olyan állapot, hogy valamely két táblán szereplő szám különbsége a 97 többszöröse legyen?

(Josef Tkadlec)

A megoldások leadási határideje: **2025. 12. 2., kedd**

- Kiadta: Slovenská komisia MO és NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- Lektorálták: Peter Novotný, Stanislav Krajčí
- Fordította: Záhorský Ákos