

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh domácej prípravy kategórie A

- 1 Ostrov je rozdelený na niekoľko kráľovstiev. Územie každého kráľovstva je konvexný mnohouholník, ktorý má práve jeden najsevernejší, najjužnejší, najvýchodnejší aj najzápadnejší bod. Každý kráľ dostal 4 vlajky s písmenami S, J, V, Z, ktoré umiestnil do týchto významných bodov svojho kráľovstva. (Napríklad v mieste stretnutia troch štátov na obrázku sú takto zapichnuté 2 vlajky kráľovstva označeného zelenou farbou, a to J a V, ale nie je tam žiadna vlajka zvyšných dvoch kráľovstiev.) Vo vnútrozemí ostrova je krtinec, kde sa stretáva 7 kráľovstiev. Určte všetky možné počty vlajok zapichnutých do krtinca.



(Josef Tkadlec)

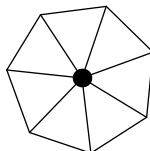
Riešenie:

Keďže všetky kráľovstvá sú mnohouholníky, ich strany, ktoré z krtinca vychádzajú alebo cezeň prechádzajú, ležia na 7 polpriamkach so spoločným začiatkom v ňom. Ten je vo vnútrozemí ostrova, takže tieto polpriamky delia plný uhol okolo krtinca na 7 konvexných uhlov, a keďže kráľovstvá sú konvexné, každé leží celé v jednom z nich.

Keďže každé kráľovstvo má jediný najvýchodnejší bod, polpriamka so začiatkom v krtinci smerujúca na sever nie je hranicou žiadneho z týchto 7 uhlov, jej vnútro teda leží vnútri niektorého z nich. To isté platí aj pre k nej opačnú polpriamku. Obe kráľovstvá ležiace v týchto uhloch teda nemajú v krtinci vlajku V ani vlajku Z. Každé zo zvyšných $7 - 2$ čiže 5 kráľovstiev však potom leží celé buď na východ, alebo na západ od krtinca, takže má v ňom buď vlajku Z, alebo vlajku V. To znamená, že v krtinci je práve 5 vlajok Z alebo V.

Analogicky je v ňom práve 5 vlajok S alebo J, takže spolu je tam práve $5 + 5$ čiže 10 vlajok.

Na obrázku vidíme príklad, kedy sa táto hodnota nadobúda.



- 2 Nech p a q sú reálne čísla také, že rovnici

$$|x^2 - 1| = px + q$$

s neznámou x vyhovujú práve 4 navzájom rôzne reálne čísla.

- a) Určte všetky možné hodnoty súčtu týchto 4 čísel.
b) Dokážte, že súčin týchto 4 čísel leží v intervale $(-3, 1)$.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Rovnica zo zadania je v prípade $|x| \geq 1$ ekvivalentná s rovnicou

$$x^2 - 1 = px + q$$

a v prípade $|x| < 1$ s rovnicou

$$-x^2 + 1 = px + q.$$

Každá z týchto kvadratických rovníc má najviac 2 riešenia. Keďže podľa zadania má pôvodná rovnica 4 riešenia, má každá z týchto rovníc práve 2 riešenia.

Prvú rovnicu ekvivalentne upravíme na tvar

$$x^2 - px - (q + 1) = 0,$$

takže podľa Viètových vzťahov majú jej dva korene súčet p .

Podobne druhú rovnicu upravíme na

$$x^2 + px + (q - 1) = 0,$$

takže podľa Viètových vzťahov majú jej dva korene súčet $-p$. Preto je súčet všetkých štyroch koreňov 0.

Ešte však musíme overiť, že je vôbec možné súčet 0 dosiahnuť, lebo inak by sa mohlo stať, že množina súčtov všetkých 4 koreňov je prázdna. To je naozaj možné, napríklad v prípade $p = 0, q = \frac{1}{2}$, keď sú korene $\frac{1}{2}\sqrt{6}, -\frac{1}{2}\sqrt{6}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Aby sme určili súčin všetkých koreňov, opäť použijeme Viètove vzťahy. Súčin koreňov prvej rovnice je $-(q+1)$ a v druhej rovnici je $q-1$, preto je súčin všetkých štyroch koreňov $-(q+1)(q-1)$ čiže $1-q^2$.

Druhá rovnica má 2 korene z intervalu $(-1, 1)$, ich súčin je preto tiež z tohto intervalu. Podľa Viètových vzťahov je pritom rovný $q-1$, takže $q(0, 2)$. Preto je súčin $1-q^2$ všetkých štyroch koreňov pôvodnej rovnice z intervalu $(-3, 1)$.

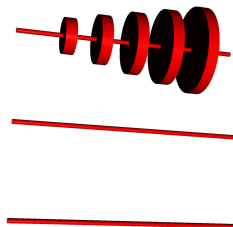
Poznámka:

Riešenie rovnice $|x^2 - 1| = px + q$ si môžeme predstaviť graficky ako prienik priamky s rovnicou $y = px + q$ a grafu funkcie s rovnicou $y = |x^2 - 1|$. Tento graf vznikne z paraboly s rovnicou $y = x^2 - 1$ tak, že jej časť pod vodorovnou osou x (teda v prípade $x \in (-1, 1)$) sa preklopí osovo súmerne podľa osi x .

Poznámka:

Úlohu je možné riešiť aj bez Viètových vzťahov tak, že si všetky riešenia vyjadríme parametricky pomocou p a q a potom počítame už len s týmito vyjadreniami.

- 3 Hlavolam sa skladá z troch vodorovných tyčí a z n , kde $n \geq 2$, rôzne veľkých kotúčov zoradených na prvej tyči podľa veľkosti. V jednom ťahu vysunieme z ľubovoľnej tyče krajný kotúč (zľava alebo sprava) a nasunieme ho na inú tyč z tej istej strany. Hlavolam je vyriešený, keď sa všetky kotúče nachádzajú na druhej tyči zoradené rovnako ako na začiatku. V závislosti od n určte najmenší možný počet ťahov, ktorý je potrebný na vyriešenie hlavolamu.



(Jozef Rajník)

Riešenie:

Ak existujú nejaké 2 kotúče, z ktorých každý presúvame len 1 ťahom, t. j. priamo z prvej tyče na druhú, nemôžeme ich oba presúvať z tej istej strany, lebo ich vzájomné poradie po oboch týchto presunoch, a teda aj na konci presúvania, by bolo opačné ako na začiatku.

Keďže tyč má len 2 konce, kotúče, z ktorých každý presúvame len 1 ťahom, sú najviac 2. Na presun každého zo zvyšných $n-2$ kotúčov tak potrebujeme aspoň 2 ťahy, takže celkový počet ťahov je aspoň $2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2$ čiže $2 + (2n-4)$ čiže $2n-2$.

Tento počet je dosiahnuteľný, a to napríklad takto:

1. Presunieme postupne $n-2$ najmenších kotúčov z prvej tyče na tretiu z ľavej strany, takže na tretej budú v opačnom poradí.
2. Presunieme druhý najväčší kotúč z prvej tyče na druhú z ľavej strany.
3. Presunieme najväčší kotúč z prvej tyče na druhú z pravej strany, takže oba najväčšie kotúče budú na druhej v pôvodnom poradí.
4. Presunieme postupne $n-2$ najmenších kotúčov z tretej tyče na druhú z ľavej strany, takže všetky kotúče budú na druhej v pôvodnom poradí.

Celkovo sme tak potrebovali naozaj $(n-2) + 1 + 1 + (n-2)$ čiže $2n-2$ ťahov.

- 4 Nech a a b sú nesúdeliteľné prirodzené čísla také, že aj čísla $a^3 - 1$ a $b^3 - 1$ sú nesúdeliteľné. Dokážte, že čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ sú tiež nesúdeliteľné.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Nech sú čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ súdeliteľné, teda existuje prvočíslo p , ktoré ich obe delí. Potom

$$p \mid (a^2 - b) - (b^2 - a) = (a - b)(a + b) + a - b = (a - b)(a + b + 1).$$

Preto platí $p \mid a - b$ alebo $p \mid a + b + 1$.

- Ak $p \mid a - b$, máme $p \mid (a^2 - b) - (a - b) = a^2 - a = a(a - 1)$, takže $p \mid a$ alebo $p \mid a - 1$. Prípade $p \mid a$ však spolu s $p \mid a - b$ dáva $p \mid b$, čo je spor s nesúdeliteľnosťou a a b . Preto platí $p \mid a - 1$, a teda aj $p \mid (a - 1)(a^2 + a + 1) = a^3 - 1$.
- Ak $p \mid a + b + 1$, máme $p \mid (a^2 - b) + (a + b + 1) = a^2 + a + 1$, takže $p \mid (a - 1)(a^2 + a + 1) = a^3 - 1$.

Analogicky $p \mid b^3 - 1$, čo je spor s nesúdeliteľnosťou čísel $a^3 - 1$ a $b^3 - 1$. Dostali sme spor so zadáním, a preto platí, že čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ sú nesúdeliteľné.

Riešenie 2:

Nech sú čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ súdeliteľné. Potom existuje prvočíslo p také, že $p \mid a^2 - b$ aj $p \mid b^2 - a$. Z toho vyplýva $a^2 \bmod p = b \bmod p$ a $b^2 \bmod p = a \bmod p$, takže dostávame

$$a^4 \bmod p = (a^2)^2 \bmod p = (b^2) \bmod p = a \bmod p,$$

teda $p \mid a^4 - a = a(a^3 - 1)$.

Ak by platilo $p \mid a$, tak z $p \mid b^2 - a$ dostávame $p \mid b^2$ a keďže p je prvočíslo, tak aj $p \mid b$, čo je v spore s nesúdeliteľnosťou čísel a a b . Preto $p \mid a^3 - 1$.

Analogicky $p \mid b^3 - 1$, čo je v spore s nesúdeliteľnosťou $a^3 - 1$ a $b^3 - 1$. Preto sú čísla $a^2 - b$ a $b^2 - a$ nesúdeliteľné.

- 5 Vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC je daný bod R . Na stranách AB a BC ležia postupne body P a Q tak, že obvod trojuholníka PQR je najmenší možný. Podobne na stranách BC a AC ležia postupne body S a T tak, že obvod trojuholníka RST je najmenší možný. Priamky PQ a ST sa pretínajú v bode K . Nech platí $\angle BAK = \angle CAR$. Dokážte, že trojuholníky PQR a RST majú rovnaký obvod.

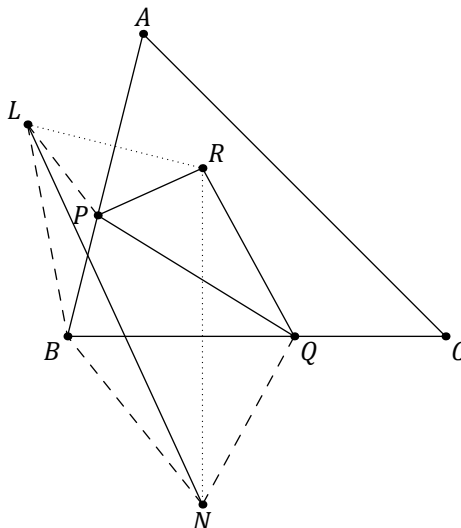
(Michal Pecho)

Riešenie:

Nech L, M, N sú postupne obrazy bodu R podľa priamok AB, AC, BC .

Nech P je ľubovoľný bod úsečky AB a Q ľubovoľný bod úsečky BC . Zo súmernosti platí $|LP| = |PR|$ a $|NQ| = |QR|$. Preto je obvod trojuholníka PQR rovný dĺžke lomenej čiary $LPQN$. Tá je aspoň $|LN|$, a táto hodnota sa nadobúda práve vtedy, keď body P a Q budú priesečníkmi úsečky NL postupne so stranami AB a BC .

Ešte musíme overiť, že úsečka NL naozaj pretína strany AB a AC .



Najprv ukážeme, že úsečka NL pretne polpriamky BA, BC . Platí

$$\angle NBL = \angle NBR + \angle RBL = 2 \cdot \angle CBR + 2 \cdot \angle RBA = 2 \cdot \angle CBA < 180^\circ,$$

takže uhol NBL je konvexný a úsečka NL pretína obe polpriamky BA a BC .

Zdôvodníme, že úsečka NL pretne aj polpriamky AB a CB : Z ostrouhlosti trojuholníka ABC máme $\angle BAC < 90^\circ$ a $2 \cdot \angle BAC < 180^\circ$. To znamená, že obraz uhla BAC v osovej súmernosti podľa priamky AB bude ležať v polrovine ACB . Keďže R leží vo vnútri uhla BAC , jeho obraz L v osovej súmernosti podľa priamky AB leží v polrovine ACB . Analogicky ukážeme, že L leží v polrovine ACB , a preto aj úsečka NL leží v polrovine ACB a pretína polpriamky AB a BC . To spolu s faktom, že úsečka NL pretína aj polpriamky BA a CB dáva, že úsečka NL naozaj pretína strany AB a BC .

Analogicky sú S a T sú priesečníky NM postupne so stranami BC a AC . Bod N leží na priamkach PQ a ST , preto je totožný s bodom K zo zadania. Obvod trojuholníka PQR je tak $|LK|$ a obvod trojuholníka RST je $|MK|$.

Potom $r \bmod 97 = 1 = r^2 \bmod 97$, takže aj v tomto prípade sa bude vyskytovať od nejakého člena iba jeden zvyšok, a to 1.

- Nech $97 \mid r^2 + r + 1$.

Ukážeme, že tejto podmienke vyhovujú práve dva rôzne zvyšky. Postupným umocňovaním čísla 2 zistíme, že vyhovujú zvyšky $2^{32} \bmod 97$ čiže 35 a $2^{64} \bmod 97$ čiže $35^2 \bmod 97$ čiže 61.

Nech je podmienka $97 \mid r^2 + r + 1$ splnená pre tri rôzne zvyšky r z $\{2, 3, \dots, 96\}$, označme ich r_1, r_2, r_3 . Potom $97 \mid r_1^2 + r_1 + 1$ a $97 \mid r_2^2 + r_2 + 1$, takže

$$97 \mid (r_1^2 + r_1 + 1) - (r_2^2 + r_2 + 1) = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2 + 1).$$

Keďže zvyšky r_1 a r_2 sú rôzne, platí $97 \mid r_1 + r_2 + 1$. Analogicky $97 \mid r_1 + r_3 + 1$, takže

$$97 \mid (r_1 + r_2 + 1) - (r_1 + r_3 + 1) = r_2 - r_3,$$

čo je spor.

Takže vo vyššie uvedenej postupnosti od istého miesta buď sa bude opakovat' číslo 0, alebo sa bude opakovat' číslo 1, alebo sa budú striedať čísla 35 a 61.

Keďže sú na tabuli 4 čísla, pre dve z nich musí nastať rovnaká možnosť. Vždy teda môžeme dosiahnuť, že rozdiel niektorých dvoch čísel bude násobkom 97.

Poznámka:

Konkrétne hodnoty 35 a 61 v skutočnosti najst' nepotrebujeme – stačí ukázať, že existujú najviac dva zvyšky r spĺňajúce $97 \mid r^2 + r + 1$. Keďže periódu 1 máme len pre zvyšky 0 a 1, ktoré vyššie uvedenej podmienke nevyhovujú, v treťom prípade sú postupnosti, kde sa striedajú dve rôzne čísla. Tieto čísla, pokiaľ vôbec existujú, vyhovujú podmienke $97 \mid r^2 + r + 1$, preto musia byť rovnaké nezávisle na počiatočnom čísle na tabuli.

Poznámka:

To, že existujú najviac dva zvyšky r spĺňajúce $97 \mid r^2 + r + 1$, je možné ukázať aj inak. Napríklad je možné to (práčne) overiť pre všetky zvyšky od 2 po 96. Inou možnosťou je odvolať sa na fakt, že $r^2 + r + 1$ je kvadratický polynóm, ktorý má po delení prvočíslom 97 najviac dva korene.

Riešenie 2:

Ak sú aspoň dve čísla na tabuli násobkom prvočísla 97, tak ich rozdiel bude tiež deliteľný 97. Predpokladajme preto, že sú na tabuli napísané aspoň 3 čísla a, b, c , ktoré nie sú deliteľné 97.

Keďže 97 je nepárne prvočíslo, existuje číslo r také, že medzi číslami $r^1 \bmod 97, r^2 \bmod 97, \dots, r^{96} \bmod 97$ sa vyskytujú všetky nenulové zvyšky po delení 97. To znamená, že existuje prirodzené číslo α také, že $r^\alpha \bmod 97 = a$. Po 5 umocneniach dostaneme $a^{32} \bmod 97$ čiže $r^{32\alpha} \bmod 97$. Z malej Fermatovej vety máme $r^{96} \bmod 97 = 1$.

Nech $\alpha = 3m + n$, kde m je prirodzené číslo a $n \in \{0, 1, 2\}$. To znamená, že

$$\begin{aligned} a^{32} \bmod 97 &= r^{32\alpha} \bmod 97 = r^{32 \cdot 3m + 32n} \bmod 97 = (r^{32 \cdot 3})^m \bmod 97 \cdot r^{32n} \bmod 97 \\ &= 1 \cdot r^{32n} \bmod 97 = r^{32n} \bmod 97 \in \{r^0 \bmod 97, r^{32} \bmod 97, r^{64} \bmod 97\}. \end{aligned}$$

Analogicky

$$b^{32} \bmod 97, c^{32} \bmod 97 \in \{r^0 \bmod 97, r^{32} \bmod 97, r^{64} \bmod 97\}.$$

Rozoberme prípady:

- Nech dávajú dve z čísel a^{32}, b^{32}, c^{32} po delení 97 rovnaký zvyšok, Potom 97 delí ich rozdiel.
- Nech dávajú všetky čísla a^{32}, b^{32}, c^{32} po delení 97 rôzne zvyšky.
Bez ujmy na všeobecnosti nech $a^{32} \bmod 97 = r^{32} \bmod 97$ a $b^{32} \bmod 97 = r^{96} \bmod 97$. Potom však platí $a^{64} \bmod 97 = r^{96} \bmod 97$, takže $a^{64} - b^{32}$ je násobok 97.

Riešenie 3:

Rozdiel dvoch prirodzených čísel je deliteľný nenulovým prirodzeným číslom práve vtedy, keď dávajú po delení týmto číslom rovnaké zvyšky.

Nech a a b sú prirodzené čísla. Keďže platí

$$(97a + b)^2 = (97a)^2 + 2 \cdot 97a \cdot b + b^2 = 97 \cdot 97a^2 + 97 \cdot 2ab + b^2 = 97(97a^2 + 2ab) + b^2,$$

číslo $(97a + b)^2$ má po delení 97 rovnaký zvyšok ako b^2 .

Nech f je funkcia z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\{0, \dots, 96\}$ taká, že

$$f(n) = n^2 \bmod 97.$$

Pôvodnú úlohu potom môžeme ekvivalentne preformulovať tak, že čísla z množiny $\{0, \dots, 96\}$ sú nahradzované hodnotou funkcie f v nich a treba zistiť, či po konečnom počte takýchto krokov budú niektoré dve čísla rovnaké. Po k krokoch sa teda z čísla n stane číslo $f^k(n)$.

Pre každé n z $\{0, \dots, 96\}$ platí

$$f(97 - n) = ((97 - n)^2) \bmod 97 = (97^2 - 2 \cdot 97 \cdot n + n^2) \bmod 97 = n^2 \bmod 97 = f(n),$$

a teda aj pre každé nenulové prirodzené číslo k platí $f^k(97 - n) = f^k(n)$.

Ukážeme, že pre každé číslo n z tejto množiny existuje k z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ také, že $f^k(n) \in \{0, 1, 61\}$:

- Ak $n \in \{61, 1, 0\}$, tak $f^0(n) = n \in \{0, 1, 61\}$.
- Ak $n \in \{96, 62, 35\}$, ukážeme, že $f^1(n) \in \{1, 61\}$:
 - $f^1(62) = f^1(97 - 62) = f^1(35) = f(35) = 35^2 \bmod 97 = 1225 \bmod 97 = 61$.
 - $f^1(96) = f(96) = 96^2 \bmod 97 = 9216 \bmod 97 = 1$.
- Ak $n \in \{81, 75, 36, 22, 16\}$, ukážeme, že $f^2(n) \in \{1, 61\}$:
 - $f^2(81) = f^2(97 - 81) = f^2(16) = f^1(f(16)) = f^1(16^2 \bmod 97) = f^1(256 \bmod 97) = f^1(62) = 61$.
 - $f^2(75) = f^2(97 - 75) = f^2(22) = f^1(f(22)) = f^1(22^2 \bmod 97) = f^1(484 \bmod 97) = f^1(96) = 1$.
 - $f^2(36) = f^1(f(36)) = f^1(36^2 \bmod 97) = f^1(1296 \bmod 97) = f^1(35) = 61$.
- Ak $n \in \{93, 91, 88, 64, 50, 47, 33, 9, 6, 4\}$, ukážeme, že $f^3(n) \in \{1, 61\}$:
 - $f^3(93) = f^3(97 - 93) = f^3(4) = f^2(f(4)) = f^2(4^2 \bmod 97) = f^2(16 \bmod 97) = f^2(16) = 61$.
 - $f^3(91) = f^3(97 - 91) = f^3(6) = f^2(f(6)) = f^2(6^2 \bmod 97) = f^2(36 \bmod 97) = f^2(36) = 61$.
 - $f^3(88) = f^3(97 - 88) = f^3(9) = f^2(f(9)) = f^2(9^2 \bmod 97) = f^2(81 \bmod 97) = f^2(81) = 61$.
 - $f^3(64) = f^3(97 - 64) = f^3(33) = f^2(f(33)) = f^2(33^2 \bmod 97) = f^2(1089 \bmod 97) = f^2(22) = 1$.
 - $f^3(50) = f^3(97 - 50) = f^3(47) = f^2(f(47)) = f^2(47^2 \bmod 97) = f^2(2209 \bmod 97) = f^2(75) = 1$.
- Ak $n \in \{95, 94, 89, 85, 79, 73, 70, 66, 54, 53, 44, 43, 31, 27, 24, 18, 12, 8, 3, 2\}$, ukážeme, že $f^4(n) \in \{1, 61\}$:
 - $f^4(95) = f^4(97 - 95) = f^4(2) = f^3(f(2)) = f^3(2^2 \bmod 97) = f^3(4 \bmod 97) = f^3(4) = 61$.
 - $f^4(94) = f^4(97 - 94) = f^4(3) = f^3(f(3)) = f^3(3^2 \bmod 97) = f^3(9 \bmod 97) = f^3(9) = 61$.
 - $f^4(89) = f^4(97 - 89) = f^4(8) = f^3(f(8)) = f^3(8^2 \bmod 97) = f^3(64 \bmod 97) = f^3(64) = 1$.
 - $f^4(85) = f^4(97 - 85) = f^4(12) = f^3(f(12)) = f^3(12^2 \bmod 97) = f^3(144 \bmod 97) = f^3(47) = 1$.
 - $f^4(79) = f^4(97 - 79) = f^4(18) = f^3(f(18)) = f^3(18^2 \bmod 97) = f^3(324 \bmod 97) = f^3(33) = 1$.
 - $f^4(73) = f^4(97 - 73) = f^4(24) = f^3(f(24)) = f^3(24^2 \bmod 97) = f^3(576 \bmod 97) = f^3(91) = 61$.
 - $f^4(70) = f^4(97 - 70) = f^4(27) = f^3(f(27)) = f^3(27^2 \bmod 97) = f^3(729 \bmod 97) = f^3(50) = 1$.
 - $f^4(66) = f^4(97 - 66) = f^4(31) = f^3(f(31)) = f^3(31^2 \bmod 97) = f^3(961 \bmod 97) = f^3(88) = 61$.
 - $f^4(54) = f^4(97 - 54) = f^4(43) = f^3(f(43)) = f^3(43^2 \bmod 97) = f^3(1849 \bmod 97) = f^3(6) = 61$.
 - $f^4(53) = f^4(97 - 53) = f^4(44) = f^3(f(44)) = f^3(44^2 \bmod 97) = f^3(1936 \bmod 97) = f^3(93) = 61$.
- Ak $n \in \{87, 86, 83, 82, 80, 78, 77, 76, 74, 72, 71, 69, 67, 65, 63, 58, 55, 52, 51, 49, 48, 46, 45, 42, 39, 34, 32, 30, 28, 26, 25, 23, 21, 20, 19, 17, 15, 14, 11, 10\}$, ukážeme, že $f^5(n) \in \{1, 61\}$:
 - $f^5(87) = f^5(97 - 87) = f^5(10) = f^4(f(10)) = f^4(10^2 \bmod 97) = f^4(100 \bmod 97) = f^4(3) = 61$.
 - $f^5(86) = f^5(97 - 86) = f^5(11) = f^4(f(11)) = f^4(11^2 \bmod 97) = f^4(121 \bmod 97) = f^4(24) = 61$.
 - $f^5(83) = f^5(97 - 83) = f^5(14) = f^4(f(14)) = f^4(14^2 \bmod 97) = f^4(196 \bmod 97) = f^4(2) = 61$.
 - $f^5(82) = f^5(97 - 82) = f^5(15) = f^4(f(15)) = f^4(15^2 \bmod 97) = f^4(225 \bmod 97) = f^4(31) = 61$.
 - $f^5(80) = f^5(97 - 80) = f^5(17) = f^4(f(17)) = f^4(17^2 \bmod 97) = f^4(289 \bmod 97) = f^4(95) = 61$.
 - $f^5(78) = f^5(97 - 78) = f^5(19) = f^4(f(19)) = f^4(19^2 \bmod 97) = f^4(361 \bmod 97) = f^4(70) = 1$.
 - $f^5(77) = f^5(97 - 77) = f^5(20) = f^4(f(20)) = f^4(20^2 \bmod 97) = f^4(400 \bmod 97) = f^4(12) = 1$.
 - $f^5(76) = f^5(97 - 76) = f^5(21) = f^4(f(21)) = f^4(21^2 \bmod 97) = f^4(441 \bmod 97) = f^4(53) = 61$.
 - $f^5(74) = f^5(97 - 74) = f^5(23) = f^4(f(23)) = f^4(23^2 \bmod 97) = f^4(529 \bmod 97) = f^4(44) = 61$.
 - $f^5(72) = f^5(97 - 72) = f^5(25) = f^4(f(25)) = f^4(25^2 \bmod 97) = f^4(625 \bmod 97) = f^4(43) = 61$.
 - $f^5(71) = f^5(97 - 71) = f^5(26) = f^4(f(26)) = f^4(26^2 \bmod 97) = f^4(676 \bmod 97) = f^4(94) = 61$.
 - $f^5(69) = f^5(97 - 69) = f^5(28) = f^4(f(28)) = f^4(28^2 \bmod 97) = f^4(784 \bmod 97) = f^4(8) = 1$.

- $f^5(67) = f^5(97 - 67) = f^5(30) = f^4(f(30)) = f^4(30^2 \bmod 97) = f^4(900 \bmod 97) = f^4(27) = 1.$
- $f^5(65) = f^5(97 - 65) = f^5(32) = f^4(f(32)) = f^4(32^2 \bmod 97) = f^4(1024 \bmod 97) = f^4(54) = 61.$
- $f^5(63) = f^5(97 - 63) = f^5(34) = f^4(f(34)) = f^4(34^2 \bmod 97) = f^4(1156 \bmod 97) = f^4(89) = 1.$
- $f^5(58) = f^5(97 - 58) = f^5(39) = f^4(f(39)) = f^4(39^2 \bmod 97) = f^4(1521 \bmod 97) = f^4(66) = 61.$
- $f^5(55) = f^5(97 - 55) = f^5(42) = f^4(f(42)) = f^4(42^2 \bmod 97) = f^4(1764 \bmod 97) = f^4(18) = 1.$
- $f^5(52) = f^5(97 - 52) = f^5(45) = f^4(f(45)) = f^4(45^2 \bmod 97) = f^4(2025 \bmod 97) = f^4(85) = 1.$
- $f^5(51) = f^5(97 - 51) = f^5(46) = f^4(f(46)) = f^4(46^2 \bmod 97) = f^4(2116 \bmod 97) = f^4(79) = 1.$
- $f^5(49) = f^5(97 - 49) = f^5(48) = f^4(f(48)) = f^4(48^2 \bmod 97) = f^4(2304 \bmod 97) = f^4(73) = 61.$
- Ak $n \in \{92, 90, 84, 68, 60, 59, 57, 56, 41, 40, 38, 37, 29, 13, 7, 5\}$, ukážeme, že $f^6(n) \in \{1, 61\}$:
 - $f^6(92) = f^6(97 - 92) = f^6(5) = f^5(f(5)) = f^5(5^2 \bmod 97) = f^5(25 \bmod 97) = f^5(25) = 61.$
 - $f^6(90) = f^6(97 - 90) = f^6(7) = f^5(f(7)) = f^5(7^2 \bmod 97) = f^5(49 \bmod 97) = f^5(49) = 61.$
 - $f^6(84) = f^6(97 - 84) = f^6(13) = f^5(f(13)) = f^5(13^2 \bmod 97) = f^5(169 \bmod 97) = f^5(72) = 61.$
 - $f^6(68) = f^6(97 - 68) = f^6(29) = f^5(f(29)) = f^5(29^2 \bmod 97) = f^5(841 \bmod 97) = f^5(65) = 61.$
 - $f^6(60) = f^6(97 - 60) = f^6(37) = f^5(f(37)) = f^5(37^2 \bmod 97) = f^5(1369 \bmod 97) = f^5(11) = 61.$
 - $f^6(59) = f^6(97 - 59) = f^6(38) = f^5(f(38)) = f^5(38^2 \bmod 97) = f^5(1444 \bmod 97) = f^5(86) = 61.$
 - $f^6(57) = f^6(97 - 57) = f^6(40) = f^5(f(40)) = f^5(40^2 \bmod 97) = f^5(1600 \bmod 97) = f^5(48) = 61.$
 - $f^6(56) = f^6(97 - 56) = f^6(41) = f^5(f(41)) = f^5(41^2 \bmod 97) = f^5(1681 \bmod 97) = f^5(32) = 61.$

Z každého zo 4 čísel na tabuli sa teda po istom konečnom počte krokov stane jedno z 3 čísel 0, 1, 61, podľa Dirichletovho princípu preto budú aspoň 2 z nich po týchto krokoch rovnaké.

Odpoveď na otázku zo zadania je teda pozitívna.

Poznámka:

Predchádzajúce výpočty možno sprehľadniť orientovaným grafom, v ktorom pre každý zvyšok x vedie hrana z x do $x^2 \bmod 97$. Tento graf má 3 komponenty súvislosti, takže aspoň 2 zvyšky sú v tom istom.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzent: Stanislav Krajčí
- preklad: Peter Novotný