
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh školského kola kategórie A

- 1 a) Nájdite príklad trojice reálnych čísel (a, b, c) takých, že platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

a

$$a + b + c = 1.$$

- b) Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b},$$

pričom trojica (a, b, c) spĺňa obe rovnosti z časti a).

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

- a) Vyhovuje napríklad trojica $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, keďže

$$\frac{1}{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

a

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

- b) Z prvej rovnosti máme

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc},$$

z čoho vyplýva

$$ab + bc + ca = 0.$$

Z toho dostávame

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &= \frac{-bc - ca}{c} + \frac{-ca - ab}{a} + \frac{-ab - bc}{b} \\ &= (-b - a) + (-c - b) + (-a - c) = -2(a + b + c) = -2. \end{aligned}$$

Číslo -2 je preto jediná možná hodnota zadaného výrazu a dosiahneme ju napríklad voľbou trojice z časti a).

Riešenie 2:

- a) Ako v riešení 1.

- b) Rovnako ako v riešení 1 odvodíme rovnosť $ab + bc + ca = 0$. Umocnením tejto rovnosti dostaneme

$$0 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2,$$

takže platí

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 = -2abc(a + b + c).$$

Úpravou zadaného výrazu dostaneme

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} = \frac{-2abc(a + b + c)}{abc} = -2(a + b + c) = -2.$$

Poznámka:

Analýzou podmienok zo zadania sa dá ukázať, že existuje nekonečne veľa vyhovujúcich trojíc. Tieto trojice ležia v prieniku guľovej plochy s rovnicou $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ a roviny s rovnicou $a + b + c = 1$.

Poznámka:

Hoci je podané riešenie časti a) úplné, vysvetlíme, ako príklad vyhovujúcej trojice nájsť. Z prvej rovnice dostávame, že vyhovujúca trojica tvaru (a, a, a) neexistuje. Hľadáme preto vyhovujúcu trojicu v tvare (a, b, b) . Potom prvá zadaná rovnosť má tvar

$$0 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b},$$

takže je splnená práve vtedy, keď $-2a = b = c \neq 0$. Druhá zadaná rovnosť má tvar

$$1 = a + b + c = a + (-2a) + (-2a) = -3a,$$

takže platí $a = -\frac{1}{3}$, čomu zodpovedá $b = c = \frac{2}{3}$.

Pokyny:

V riešeniach časti a) udeľte body takto:

- A1. Uvedenie správnej trojice (aj bez overenia podmienok): 2 body.
- A2. Správny myšlienkový postup, ktorý však vedie k nesprávnemu výsledku z dôvodu numerickej chyby: 1 bod.

Celkovo za časť a) dajte maximum z bodov za A1 a A2.

V riešeniach časti b) udeľte body nasledovne:

- B1. Úplné riešenie: 4 body.
- B2. Odvodenie $ab + bc + ca = 0$ z $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$: 1 bod.
- B3. Odvodenie aspoň jednej rovnosti tvaru $\frac{ab}{c} = -a - b$: 2 body.
- B4. Uvedenie odpovede -2 bez zdôvodnenia: 1 bod.

Celkovo za časť b) dajte maximum z bodov za B1, B2, B3, B4.

- 2 Rozhodnite, či je možné z ľubovoľných troch nenulových prirodzených čísel, z ktorých každé má medzi číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6 aspoň štyri delitele, vybrať dve, ktorých súčet má medzi číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6 tiež aspoň štyri delitele.

(Dominik Martin Rigász)

Riešenie 1:

Množinu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ označme M .

Nech n je ľubovoľné číslo, ktoré má medzi číslami z množiny M aspoň štyri delitele. Jeden z nich je zrejme 1, potrebuje teda ešte aspoň tri.

Ak by n nebolo deliteľné číslom 2, tak by nemohlo byť deliteľné ani číslami 4 a 6. V tomto prípade by jeho jedinými možnými deliteľmi z množiny M boli čísla 1, 3, 5, čo je málo. Číslo n je teda deliteľné aj číslom 2.

Okrem 1 a 2 má n ešte aspoň dva iné delitele z množiny M . Rozoberieme prípady:

- Nech 3 je deliteľ n .
Keďže aj 2 je deliteľ n , aj 6 je deliteľ n . Z toho vyplýva, že n má v množine M aspoň štyri delitele, a to 1, 2, 3, 6.
- Nech 3 nie je deliteľ n . Potom ani 6 nie je deliteľ n . Zostávajúce možné delitele z množiny M sú 4 a 5. Keďže n má aspoň štyri delitele z množiny M , je nimi deliteľné. V tomto prípade má n z množiny M presne štyri delitele, a to 1, 2, 4, 5.

To znamená, že každé číslo, ktoré má medzi číslami z množiny M aspoň štyri delitele, je deliteľné číslami 1, 2, 3, 6 alebo číslami 1, 2, 4, 5.

Podľa Dirichletovho princípu teda medzi tromi takýmito číslami existujú aspoň dve, ktoré majú delitele 1, 2, 3, 6, alebo aspoň dve, ktoré majú delitele 1, 2, 4, 5. Potom je však súčet takýchto dvoch čísel deliteľný každým číslom z príslušnej štvorice.

Riešenie 2:

Ukážeme, že každé nenulové prirodzené číslo má medzi číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6 aspoň štyri delitele práve vtedy, keď je deliteľné číslom 6 alebo číslom 20:

← Ak $6 \mid n$, tak čísla 1, 2, 3, 6 delia n , a ak $20 \mid n$, tak 1, 2, 4, 5 delia n .

→ Naopak, nech n má medzi číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6 aspoň štyri delitele.

Ak 6 nedelí n , tak aspoň jedno z čísel 2 a 3 nedelí n . Ak 2 nedelí n , tak ani 4 nedelí n . Zostávajú možné delitele 1, 3, 5, čo je málo. Preto 2 delí n . Keďže 6 nedelí n , ani 3 nedelí n . Číslo n je teda deliteľné číslami 1, 2, 4, 5, takže je deliteľné 20.

Podľa Dirichletovho princípu teda medzi tromi číslami, z ktorých každé má medzi číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6 aspoň štyri delitele, sú aspoň dve deliteľné číslom 6 alebo aspoň dve čísla deliteľné číslom 20. Preto je aj jeden zo súčtov týchto čísel deliteľný číslom 6 alebo 20, takže má medzi číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6 aspoň štyri delitele.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné body z vyššie popísaných postupov takto:

- A1. Pozorovanie, že každé z uvažovaných čísel je deliteľné číslom 2: 1 bod
- A2. Dôkaz, že uvažované číslo má delitele 1, 2, 3, 6 (t. j. je deliteľné 6) alebo delitele 1, 2, 4, 5 (t. j. je deliteľné 20): 4 body
- B. Dokončenie riešenia za predpokladu A2: 2 body

Celkovo za neúplné riešenia udeľte súčet počtov bodov za B a maxima z počtov bodov za A1 a A2.

- 3 V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme P priesečník uhlopriečok. Ďalej označme H priesečník výšok trojuholníka APB . Predpokladajme, že platí $|AP| + |PB| = |AD| + |BC|$. Dokážte, že $|HC| = |HD|$.

(Josef Tkadlec, Michal Janík)

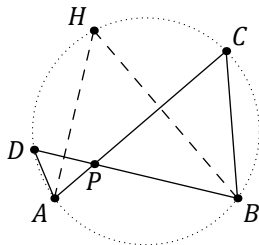
Riešenie:

Ukážeme, že platí $|AP| = |AD|$ a $|BP| = |BC|$. Keďže štvoruholník $ABCD$ je tetivový, z vety o obvodových uhloch nad tetivou AB dostávame $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$. Zároveň platí $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPC|$, takže trojuholníky APD a BPC sú podľa vety uu podobné. Existuje teda konštanta k taká, že $|PB| = k \cdot |AP|$ a $|BC| = k \cdot |AD|$. Z predpokladu máme

$$\begin{aligned} |AP| + |PB| &= |AD| + |BC|, \\ |AP| + k \cdot |AP| &= |AD| + k \cdot |AD|, \\ (1 + k) \cdot |AP| &= (1 + k) \cdot |AD|, \\ |AP| &= |AD|. \end{aligned}$$

Z rovnosti $|AP| + |PB| = |AD| + |BC|$ potom dostávame $|PB| = |BC|$, takže trojuholníky APD a BPC sú rovnoramenné so základňami postupne PD , resp. PC .

Os základne PD trojuholníka APD preto splyva s výškou na stranu PB v trojuholníku APB . Z toho máme, že bod H leží na osi úsečky PD , a preto $|HD| = |HP|$. Analogicky $|HC| = |HP|$, takže $|HC| = |HP| = |HD|$.



Poznámka:

Keďže H leží na osiach uhlov DAC a DBC , je to stred oblúka s krajnými bodmi C a D kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$ neobsahujúceho A a B . Z toho podľa vety o obvodových uhloch vyplýva rovnosť $|HC| = |HD|$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné body z vyššie popísaných postupov takto:

- A1. Uvedenie, že trojuholníky APD a BPC sú podobné: 1 bod
- A2. Dôkaz, že aspoň jeden z trojuholníkov APD a BPC je rovnoramenný: 3 body
- B1. Dôkaz rovnosti $|HC| = |HP|$ alebo $|HD| = |HP|$ za predpokladu rovnoramennosti trojuholníkov APD a BPC : 2 body
- B2. Dôkaz, že H je stred oblúka CD kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$ neobsahujúceho A a B za predpokladu rovnoramennosti trojuholníkov APD a BPC : 2 body

Celkovo za neúplné riešenia udeľte súčet maxima z počtov bodov za A1 a za A2 a maxima z počtov bodov za B1 a za B2.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autor za SK MO: Dominik Martin Rigász
- recenzenti: Stanislav Krajčí, Peter Novotný
- preklad: Peter Novotný