

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z9

1 V rohových políčkach tabuľky 3×3 sú napísané čísla tak, ako na obrázku:

3		6
12		15

Do prázdnych políčok doplňte nenulové prirodzené čísla tak, aby súčin čísel v každom riadku a každom stĺpci bol rovnaký. Nájdite všetky možnosti.

(Jaroslav Zhouf)

N1 V nasledujúcej tabuľke sú a, b, c také kladné celé čísla, že hodnoty v susedných políčkach sa rovnajú. Nájdite riešenia s tromi najmenšími hodnotami a .

$5a$	$7b$	$8c$
------	------	------

Riešenie:

Čísla vo všetkých políčkach sa rovnajú. Pretože čísla 5, 7, 8 sú navzájom nesúdeliteľné, všeobecné riešenie je v tvare $(7 \cdot 8 \cdot k, 5 \cdot 8 \cdot k, 5 \cdot 7 \cdot k)$, kde k je nenulové prirodzené číslo. Riešenia s tromi najmenšími hodnotami a sú $(56, 40, 35)$, $(112, 80, 70)$, $(168, 120, 105)$.

N2 V nasledujúcej tabuľke sú a, b, c také nenulové prirodzené čísla, že hodnoty v susedných políčkach sa rovnajú. Nájdite riešenia s tromi najmenšími hodnotami a .

$20a$	$21b$	$12c$
-------	-------	-------

Riešenie:

Čísla vo všetkých políčkach sa rovnajú. Platí $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $12 = 4 \cdot 3$, takže všeobecné riešenie má tvar $(3 \cdot 7 \cdot k, 4 \cdot 5 \cdot k, 5 \cdot 7 \cdot k)$, kde k je nenulové prirodzené číslo. Riešenia s tromi najmenšími hodnotami a sú $(21, 20, 35)$, $(42, 40, 70)$, $(63, 60, 105)$.

N3 Pre kladné párne čísla a, b, c platí, že $a \cdot b = b \cdot c$ a číslo $a \cdot b \cdot c$ je dvojciferné a väčšie než 75. Aký môže byť súčet týchto troch čísel?

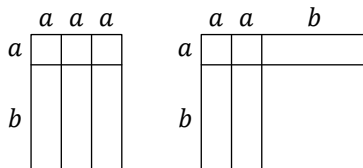
Riešenie:

Čísla a, b, c sú párne, teda $a \cdot b \cdot c$ je násobok 8 a jeho možné hodnoty sú 80, 88 a 96. Pretože $a \cdot b = b \cdot c$, platí $a = c$. Hľadané trojice sú $(2, 20, 2)$, $(2, 22, 2)$, $(2, 24, 2)$, $(4, 6, 4)$, ich súčty sú postupne 24, 26, 28, 14.

D1 Obdĺžnik je tromi úsečkami rozdelený na tri štvorce a tri menšie neštvorcové obdĺžniky. Všetky čiastkové pravouholníky majú dĺžky všetkých strán vyjadrené v cm prirodzenými číslami. Obsah jedného z malých obdĺžnikov je 14 cm^2 . Aký môže byť obsah daného obdĺžnika?

Riešenie:

Typovo rôzne rozdelenia sú naznačené na týchto obrázkoch.

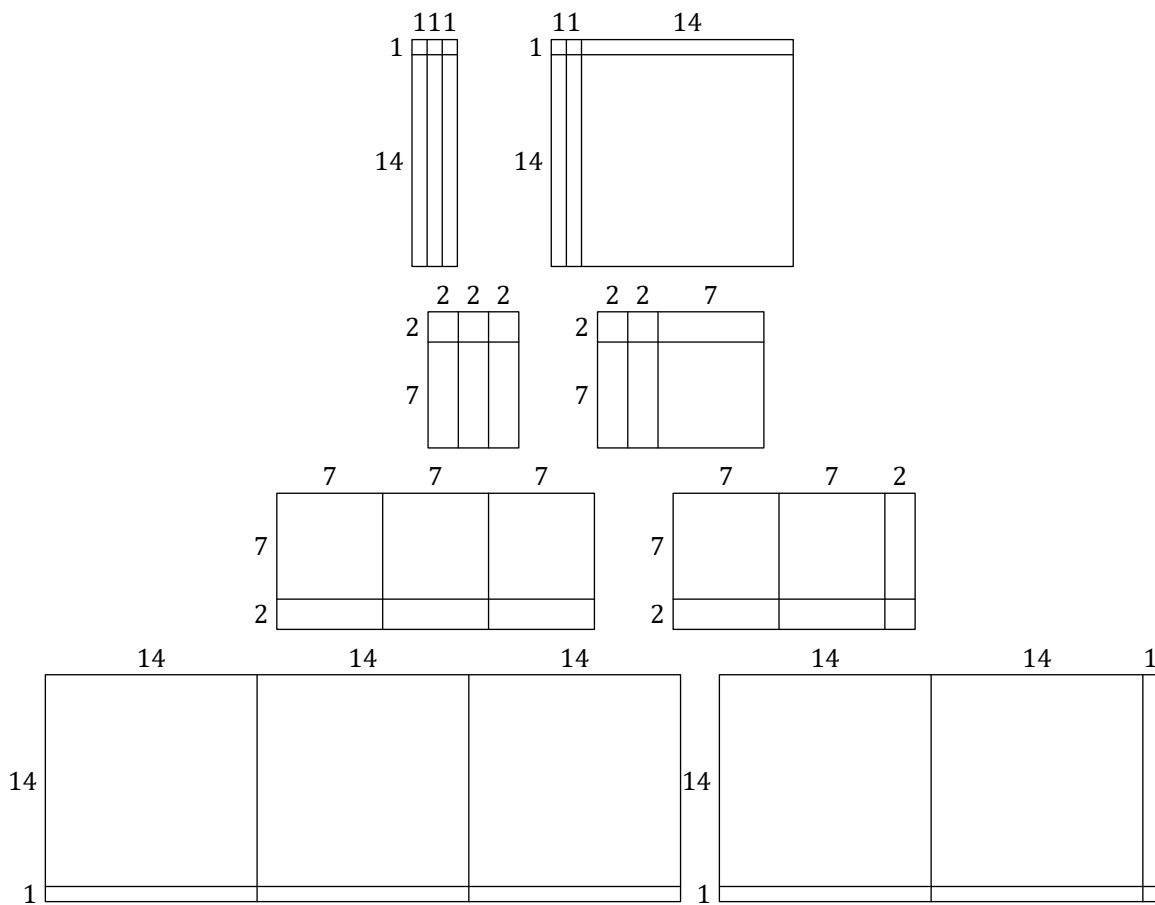


V oboch prípadoch sú malé obdĺžniky navzájom zhodné. Ak sú strany obdĺžnikov $a \text{ cm}$ a $b \text{ cm}$, ich obsah v cm^2 je ab , takže $ab = 14$, a teda

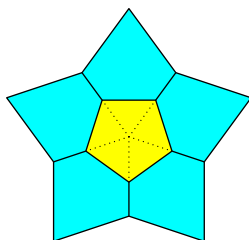
$$(a, b) \in \{(1, 14), (2, 7), (7, 2), (14, 1)\},$$

teda máme štyri možné dvojice a a b . Pre prvý typ rozdelenia je obsah daného obdĺžnika $3a(a + b) \text{ cm}^2$, čo po dosadení dáva postupne hodnoty 45 cm^2 , 630 cm^2 , 54 cm^2 , 189 cm^2 . Pre druhý typ rozdelenia je obsah

daného obdĺžnika $(2a + b)(a + b) \text{ cm}^2$, čo po dosadení dáva postupne hodnoty 240 cm^2 , 435 cm^2 , 99 cm^2 , 144 cm^2 .



- 2 Útvár na obrázku je vytvorený z piatich zhodných azúrových kosoštvorcov a jedného žltého pravidelného päťuholníka, ktorý kosoštvorce čiastočne prekrýva. Kosoštvorce susedia celými stranami a na týchto stranách ležia vrcholy päťuholníka. Pomer dĺžky polomeru kružnice opísanej päťuholníku a dĺžky strany kosoštvorca je 4 : 7.



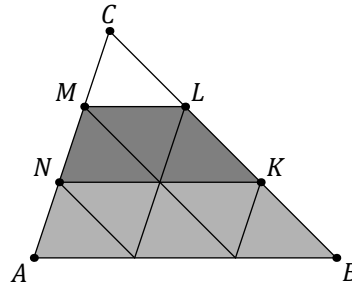
Rozhodnite, či neprekrytá časť každého kosoštvorca má väčší, rovnaký alebo menší obsah ako päťuholník.

(Mária Dományová)

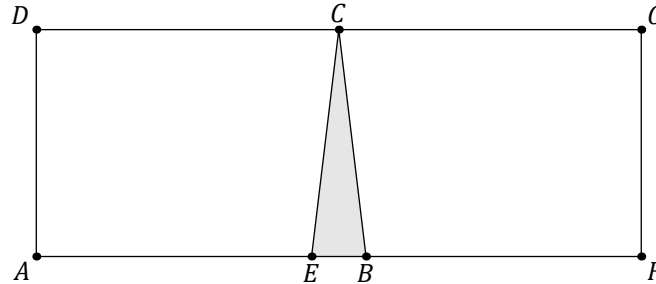
- N1** Nech ABC je trojuholník. Na strane BC sú body K a L také, že $|BK| = |KL| = |LC|$. Na strane AC sú body M a N také, že $|AM| = |MN| = |NC|$. Určite postupný pomer obsahov lichobežníkov $ABKM$ a $MKLN$ a trojuholníka NLC .

Riešenie:

Trojuholník ABC možno priamkami rovnobežnými so stranami rozdeliť na 9 trojuholníkov zhodných s trojuholníkom NLC . Lichobežník $ABKM$ je tvorený 5 takýmito trojuholníkmi, lichobežník $MKLN$ je tvorený 3. Platí teda $S(ABKM) : S(MKLN) : S(NLC) = 5 : 3 : 1$.

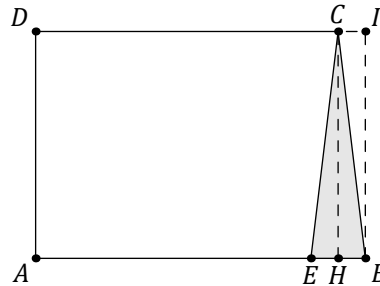


- N2** Dva zhodné pravouhlé lichobežníky $ABCD$ a $FECG$ sa prekrývajú v trojuholníku EBC . Obsah trojuholníka EBC tvorí 18 % obsahu lichobežníka $ABCD$. Určte pomer dĺžok úsečiek AB a CD .



Riešenie:

Doplňme body H a I tak, aby $AHCD$ a $ABID$ boli obdĺžniky. Trojuholníky EHC , BHC , CIB sú navzájom zhodné, obsah každého z nich predstavuje 9 % obsahu lichobežníka $ABCD$. Obsah obdĺžnika $AHCD$, resp. $ABID$ predstavuje 91 %, resp. 109 % obsahu lichobežníka $ABCD$. Pomer dĺžok úsečiek AB a CD je rovnaký ako pomer obsahov obdĺžnikov $ABID$ a $AHCD$, t. j. 109 : 91.

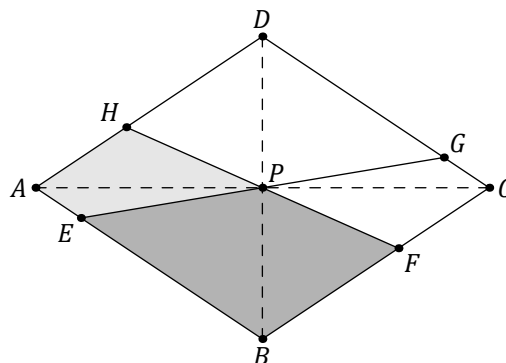


- N3** Na stranách AB , BC , CD , DA kosoštvorca $ABCD$ sú postupne body E , F , G , H také, že platí $|AE| : |EB| = |CG| : |GD| = 1 : 4$ a $|BF| : |FC| = |DH| : |HA| = 3 : 2$. Bod P je priesečník priamok EG a HF . Určte pomer obsahov štvoruholníkov $AEPH$ a $EBFP$.

Riešenie:

Kosoštvorec je stredovo súmerný podľa priesečníka uhlopriečok a rovnako sú súmerné dvojice bodov E a G , resp. F a H . Teda bod P je priesečník uhlopriečok kosoštvorca. Každý zo štvoruholníkov $AEPH$ a $EBFP$ je uhlopriečkami rozdelený na dva trojuholníky. Všetky štyri trojuholníky majú spoločný vrchol P a rovnako dlhé výšky z tohto vrchola. Preto sú ich obsahy úmerné dĺžkam strán oproti vrcholu P a platí:

$$\frac{S(AEPH)}{S(EBFP)} = \frac{S(AEP) + S(AHP)}{S(BEP) + S(BFP)} = \frac{|AE| + |AH|}{|BE| + |BF|} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{3}{7}.$$



- D1** Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD dĺžok 12 cm, resp. 4 cm a výškou 6 cm. Na ramenách AD , BC ležia body E , F také, že lichobežníky $ABFE$ a $EFCD$ majú rovnaký obsah. Vypočítajte dĺžku úsečky EF .

Riešenie:

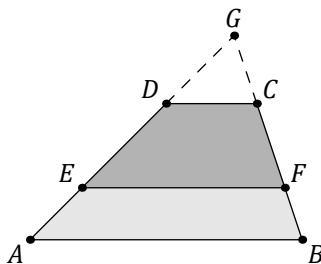
Nech G je priesečník predĺžených ramien lichobežníka. Trojuholníky DCG , EFG a ABG sú navzájom podobné. Koeficient podobnosti pre dvojicu DCG a ABG je 3, koeficient podobnosti pre dvojicu DCG a EFG označme k . Platí

$$S(ABFE) = (9 - k^2) \cdot S(DCG),$$

$$S(EFGH) = (k^2 - 1) \cdot S(DCG).$$

Z rovnosti obsahov dostávame $9 - k^2 = k^2 - 1$, odkiaľ $k^2 = 5$, a teda $k = \sqrt{5}$. Potom $|EF| = k \cdot |CD| = 4\sqrt{5}$ cm, čo je približne 8,9 cm.

(Výška lichobežníka $ABCD$ ani veľkosti základní nie sú podstatné, pri riešení sa použil iba pomer $|AB| : |CD|$.)



- 3** Na tabuli je napísaných niekoľko po sebe nasledujúcich prirodzených čísel počnúc číslom 1. Každé z týchto čísel má buď azúrovú, alebo žltú farbu. Súčet každých dvoch rôznofarebných čísel je prvočíslo, súčet každých dvoch čísel rovnakej farby je zložené číslo.

Najviac koľko čísel môže byť napísaných na tabuli?

(Patrik Bak)

- N1** Pomocou metódy Eratostenovho sita nájdite všetky prvočísla menšie ako 100.

(Popis tohto algoritmu je napríklad na https://sk.wikipedia.org/wiki/Eratostenovo_sito.)

Riešenie:

Všetky prvočísla menšie ako 100 sú 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

- N2** Zafarbte čísla 1, 2, 3 podľa pravidiel v súťažnej úlohe.

Riešenie:

Čísla 1 a 3 musia mať rovnakú farbu, číslo 2 inú.

- N3** Nájdite všetky dvojice nenulových prirodzených čísel menších ako 6, ktorých súčty sú zložené čísla.

Riešenie:

Riešenia zodpovedajú sčítancom vo výrazoch: $4 = 1 + 3 = 2 + 2$, $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5 = 4 + 4$, $9 = 4 + 5$, $10 = 5 + 5$.

- D1** Fibonacciho postupnosť začína číslami 0 a 1, a každý ďalší člen je súčet predchádzajúcich dvoch čísel. (Niekoľko prvých členov teda vyzerá takto: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.) Dokážte, že číslo na 10000. mieste je zložené.

Riešenie:

V postupnosti sa strieda jedno párne a dve nepárne čísla (súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne a súčet dvoch nepárnych čísel je párne). Keďže číslo 10000 dáva po delení 3 zvyšok 1, na 10000. mieste postupnosti je párne číslo. Párne čísla väčšie ako 2 sú zložené, takže je zložené aj naše číslo.

- 4** Nenulové prirodzené číslo nazveme *kvadrátové*, ak jeho zápis obsahuje cifru alebo skupinu po sebe idúcich cifier, ktoré sú zápisom druhej mocniny nenulového prirodzeného čísla. (Např. čísla 257 a 725 sú kvadrátové, čísla 275 a 572 nie.)

Určte počet všetkých dvojciferných kvadrátových čísel.

(Monika Dillingerová)

- N1** Nájdite

- najmenšie trojciferné kvadrátové číslo;

- 101. trojčiferné kvadrátové číslo;
- 130. trojčiferné kvadrátové číslo.

Riešenie:

Všetky čísla od 100 do 199 sú kvadrátové, nasledujúce je 201. Teda prvé je 100 a stoprvé je 201. Ďalej treba pozorne vypisovať, stotridsiate je 248.

N2 Koľko trojčiferných kvadrátových čísel začína cifrou 7 a obsahuje cifru 5?

Riešenie:

Čísla 5 a 7 nie sú druhé mocniny. Žiadne dvojčiferné číslo, ktoré je druhá mocnina, sa nezačína na 7 a jediné dvojčiferné číslo, ktoré je druhá mocnina a obsahuje 5, je 25. Trojčiferné čísla, ktoré sú druhé mocniny a začínajú sa na 7, sú 729 a 784. Tieto čísla však cifru 5 neobsahujú. Vyhovujúcich čísel je 7, a to 725, 751, 715, 754, 745, 759, 795.

N3 Nájdite desať najmenších čísel, ktoré obsahujú cifru 3, ale nie je deliteľné 3.

Riešenie:

Sú to čísla 13, 23, 31, 32, 34, 35, 37, 38, 43, 53.

D1 Koľko existuje trojčiferných čísel, ktorých zápis obsahuje práve dve cifry predstavujúce jednociferné zložené číslo?

Riešenie:

Jednociferné zložené čísla sú štyri: 4, 6, 8, 9. Na dvoch z troch miest sú tieto cifry a na zostávajúcom mieste je iná cifra. Ak je táto cifra na prvom mieste, nemôže to byť 0, máme teda $5 \cdot 4 \cdot 4$ čiže 80 možností. Ak je na druhom alebo treťom mieste, máme v oboch prípadoch $4 \cdot 6 \cdot 4$ čiže 96 možností. Trojčiferných superzložených čísel je teda $80 + 96 + 96$ čiže 272.

5 V lyžiarskom oddiele sa počet všetkých detí znížil o 10 %, pričom pomer dievčat voči všetkým deťom vzrástol z 50 % na 55 %. O koľko percent sa zmenil počet dievčat?

(Iveta Jančígová)

N1 Novákovci natrhali 30 kg čerešní. Z 30 % čerešní vyrobili šťavu, polovicu zo zvyšných čerešní spracovali na marmeládu. Nový zvyšok rozdelili na tri rovnaké diely, dva diely usušili a jeden diel zjedli. Koľko percent všetkých čerešní Novákovci usušili?

Riešenie:

Šťavu vyrobili z $\frac{3}{10} \cdot 30$ čiže 9 kíl zostalo 21 kíl. Marmeládu urobili z $\frac{1}{2} \cdot 21$ čiže 10,5 kíl, rovnaké množstvo zostalo. Na sušenie vyčlenili $\frac{2}{3} \cdot 10,5$ čiže 7 kíl. Novákovci teda usušili $\frac{7}{30}$ čiže 23,3 % čerešní.

Poznámka:

Hmotnosť natrhaných čerešní v skutočnosti nie je na vyriešenie úlohy potrebná.

N2 Vo firme pije 45 % zamestnancov čaj, ostatní pijú kávu. Kávu sladí o polovicu viac zamestnancov než tých, ktorí ju nesladia. Koľko percent všetkých zamestnancov pije nesladenú kávu?

Riešenie:

Kávu pije 55 % zamestnancov. Pomer tých, ktorí kávu sladia a nesladia, je 3 : 2. Pomer tých, ktorí kávu nesladia, a všetkých, čo pijú kávu, je 2 : 5. Nesladenú kávu pije $\frac{2}{5} \cdot \frac{55}{100}$ čiže 22 % zamestnancov.

N3 V učiteľskom zbore je p vyučujúcich, z toho $(100 - p)$ % tvoria ženy a mužov je 36. Koľko vyučujúcich je v zbore?

Riešenie:

Muži tvoria p % zamestnancov a je ich 36, teda $p \cdot \frac{p}{100} = 36$. Odtiaľ plyne $p^2 = 3600$, teda $p = 60$. V zbore je 60 vyučujúcich.

D1 Vo vrecúšku boli rožky, z ktorých 80 % bolo s rascou, ostatné s makom. Po zjedení dvoch rožkov s rascou tvoril tento druh rožkov 75 % všetkých. Koľko rožkov bolo s makom?

Riešenie:

Nech r a m sú počty rožkov s rascou, resp. s makom. Potom $\frac{r}{r+m} = \frac{80}{100}$ a $\frac{r-2}{r+m-2} = \frac{75}{100}$, z čoho $r = 8$ a $m = 2$.

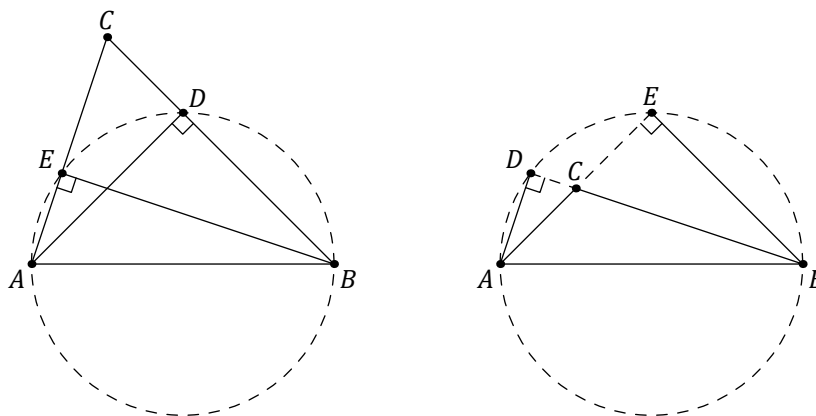
6 Kružnice k a l sa dotýkajú zvonku, pričom polomer kružnice k je rovnaký ako priemer kružnice l . Bod S je stred kružnice k , bod T je bod dotyku kružníc, bod A leží na kružnici l mimo spojnice stredov kružníc a bod M je stred úsečky AS . Dokážte, že uhol ATM je pravý.

(Lukáš Komín)

- N1** Vo všeobecnom trojuholníku ABC označme D a E päty výšok na strany BC a AC . Dokážte, že body A, B, D, E ležia na jednej kružnici.

Riešenie:

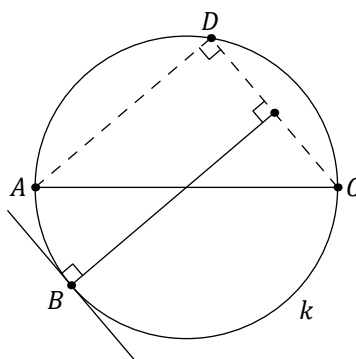
Trojuholníky ABD a ABE sú pravouhlé s pravými uhlami pri vrcholoch D a E . Vrcholy všetkých pravouhlých trojuholníkov s preponou AB tvoria kružnicu, tzv. Tálesovu kružnicu nad priemerom AB , avšak okrem bodov A a B .



- N2** Na kružnici k so stredom S sú dané navzájom rôzne body A, B, C, D také, že platí $S \in AC$ a $BS \parallel AD$. Dokážte, že dotyčnica ku kružnici k v bode dotyku B je rovnobežná s priamkou CD .

Riešenie:

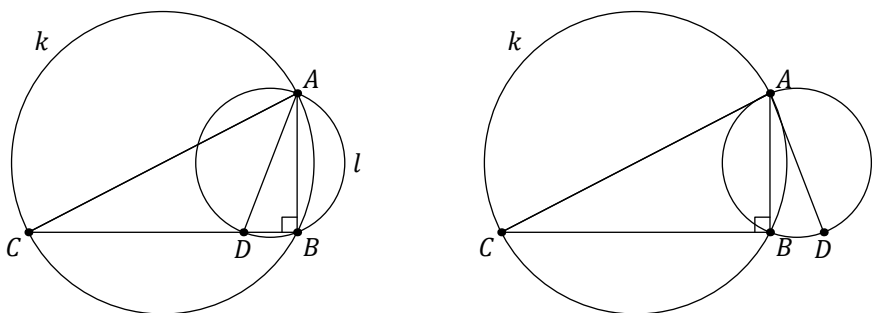
Podľa Tálesovej vety je uhol ADC pravý. Priamky BS a AD sú rovnobežné, teda priamky BS a CD sú kolmé. Dotyčnica s bodom dotyku B je kolmá na BS , teda je rovnobežná s CD .



- D1** Kružnice k a l sa pretínajú v rôznych bodoch A a B . Body C a D sú krajné body priemerov kružníc k a l prechádzajúcich spoločným bodom A . Dokážte, že body B, C a D ležia na jednej priamke.

Riešenie:

Ak niektorý z bodov C a D splyva s bodom B , tvrdenie platí triviálne. V opačnom prípade sú podľa Tálesovej vety uhly ABC a ABD pravé. Body C a D preto ležia na kolmici na priamku AB prechádzajúcej bodom B , teda body B, C, D ležia na jednej priamke.



- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajčí
- preklad: Iveta Jančígová