

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kola kategórie Z5

- 1 Zvláštna kalkulačka má iba dve funkčné tlačidlá. Po stlačení prvého tlačidla sa k číslu na displeji pripočíta číslo 1, po stlačení druhého tlačidla sa číslo na displeji vynásobí číslom 2. Na displeji po každom stlačení tlačidla svieti správny výsledok.

Nájdite dva rôzne spôsoby, ako pomocou 6 stlačení tlačidiel dostať na displeji z čísla 1 číslo 15.

(Iveta Jančígová)

V nasledujúcich troch návodných úlohách používame rovnakú kalkulačku ako v súťažnej úlohe.

- N1 Na displeji svietilo číslo 1. Potom sme štyrikrát stlačili rovnaké tlačidlo. Aké číslo mohlo byť po týchto stlačeniach na displeji?

Riešenie:

Buď 5 (použitím prvého tlačidla), alebo 16 (použitím druhého tlačidla).

- N2 Koľkými spôsobmi môžeme dostať na displeji z čísla 1 číslo 4?

Riešenie:

Dá sa to 4 spôsobmi:

- $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$,
- $1 \cdot 2 + 1 + 1 = 4$,
- $(1 + 1) \cdot 2 = 4$,
- $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

- N3 Na displeji svietilo neznáme číslo. Potom sme štyrikrát stlačili to isté tlačidlo. Aké mohlo byť neznáme číslo, ak na displeji teraz svieti číslo

- a) 15;
b) 16?

Riešenie:

- a) Iba 11 ($11 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15$).
b) Buď 1 ($1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$), alebo 12 ($12 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$).

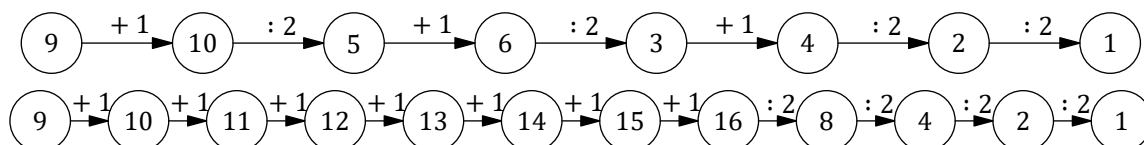
- D1 Zvláštna kalkulačka funguje ako tá v súťažnej úlohe, ale po stlačení druhého tlačidla sa číslo na displeji namiesto násobenia vydolí číslom 2. Nájdite dva spôsoby, ako z čísla 9 na displeji dostať číslo 1.

Riešenie:

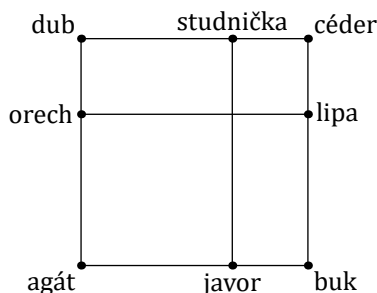
Dve možné riešenia sú znázornené nižšie na obrázku pomocou tzv. počítacieho hada. Úloha má nekonečne veľa riešení, napr. opakovanie nápadu $(1 + 1) : 2 = 1$.

Po násobení akéhokoľvek prirodzeného čísla dvoma je výsledok párne číslo. Teda pred nepárnym číslom musí byť nutne $+1$. Pred párnym číslom môže byť buď $+1$, alebo $\times 2$.

Postupne odzadu nájdeme dve vyhovujúce riešenia:



- 2 K zámku patrí park v tvare štvorca so stranou dĺžky 240 metrov. Náčrt parku je na obrázku. Po stranách štvorca vedú cesty, v jeho vrcholoch stoja agát, buk, céder a dub. Park križujú dva ďalšie chodníky rovnobežné so stranami štvorcového parku – jeden vedie od javora k studničke, druhý vedie od lipy k orechu.



Princezná pri svojich prechádzkach parkom chodila len po cestách a chodníkoch, nikdy sa nevracala, ani zbytočne neodbočovala. Zistila, že:

- prechádzka od buka k studničke okolo javora, agáty, orecha a duba je dvakrát dlhšia ako okolo lipy a cédra,
- prechádzka od buka k studničke okolo lipy a cédra je rovnako dlhá ako prechádzka od duba k lipe okolo studničky a cédra.

Aká dlhá je priama cesta od agáty k orechu?

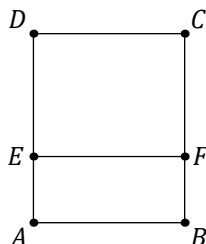
(Marián Macko)

N1 Záhon má tvar obdĺžnika $ABCD$. Priama cesta z A do B meria 6 metrov. Cesta z A do B cez D a C meria 16 metrov. Aká dlhá je priama cesta z B do C ?

Riešenie:

Rozdiel dĺžok ciest $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ a $A \rightarrow B$ je $16 - 6$ čiže 10 metrov. To zodpovedá súčtu dĺžok strán AD a BC , ktoré sú rovnako dlhé. Priama cesta z B do C má $10 : 2$ čiže 5 metrov.

N2 Na obrázku sú znázornené cesty, ktoré tvoria hranice dvoch obdĺžnikov so spoločnou stranou. Priama cesta z A do B meria 8 metrov, najkratšia cesta z A do C meria 18 metrov. Viktor sa prechádza po cestách z A do C , a to tak, že žiadnu časť neprejde viac než raz. Aká dlhá môže byť Viktorova prechádzka?



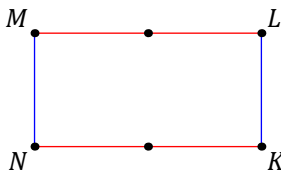
Riešenie:

Najkratšia prechádzka je buď $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C$, alebo $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C$, alebo $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C$ a meria 18 metrov. Keďže $|AB| = 8$ m, platí $|BC| = |AD| = 10$ m. Jediná ďalšia možná prechádzka je $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C$ a je dlhá $3 \cdot 8 + 10$ čiže 34 metrov.

N3 Priama cesta medzi vrcholmi K a L obdĺžnika $KLMN$ je päťkrát kratšia než cesta po obvode z K cez N a M do L . Vyjadrite dĺžku cesty z L cez M do N pomocou dĺžky niektorej strany obdĺžnika.

Riešenie:

Rovnako dlhé strany obdĺžnika zvýrazníme rovnakými farbami, pozri obrázok. Súčet dĺžok dvoch červených a jednej modrej úsečky je päťkrát väčší než dĺžka modrej úsečky ($2c + m$ čiže $5m$). Teda červená úsečka je dvakrát dlhšia ako modrá ($c = 2m$). Cesta $L \rightarrow M \rightarrow N$ je rovnako dlhá ako tri modré alebo jedna a pol červenej strany obdĺžnika ($c + m = 3m = \frac{3}{2}c$).

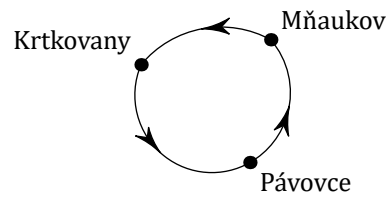


D1 Jarka prešla vzdialenosť medzi dvoma kríkmi 4 krokmi. Lenka tú istú vzdialenosť prešla 3 krokmi. Jeden Lenkin krok je o 15 cm dlhší ako jeden Jarkin krok. Ako ďaleko od seba boli kríky?

Riešenie:

Po troch krokoch je Lenka o $3 \cdot 15$ cm čiže 45 cm ďalej ako Jarka. Teda dĺžka Jarkinho kroku je 45 cm a vzdialenosť kríkov je $4 \cdot 45$ cm čiže 180 cm.

- D2** Okružná cesta spája tri dediny tak ako na obrázku. Vo vyznačenom smere to je z Pávoviec do Krtkovian 10 km, z Mňaukova do Pávoviec 15 km a z Krtkovian do Mňaukova 16 km.



Aká dlhá je celá okružná cesta?

Riešenie:

Súčet uvedených vzdialeností medzi dedinami zodpovedá dvom dĺžkam okružnej cesty, t. j. $(10 + 15 + 16)$ km čiže 41 km. Dĺžka okružnej cesty je polovičná, teda 20 km a 500 m.

Prevzaté zo 74. ročníka MO, úloha Z5-II-2 (<https://skmo.sk/dokument.php?id=5382>).

- 3** Danká a Janka každá pre seba nazbierali jahody. Keby mala Janka o polovicu viac jahôd, než nazbierala, mala by ich rovnako ako Danká. Keby mala Janka dvakrát viac jahôd, než nazbierala, mala by ich o 48 viac ako Danká.

Koľko jahôd nazbierala Janka a koľko Danká?

(Monika Dillingerová)

- N1** Radka a Šárka mali spolu 60 malín. Radka ich mala dvakrát viac ako Šárka. Koľko malín malo každé z dievčat?

Riešenie:

Spolu mali trojnásobok toho, čo mala Šárka. Šárka mala 20 malín, Radka 40.

- N2** Bolek a Lolek mali spolu 60 čučoriedok. Bolek ich mal

- a) o polovicu;
- b) o tretinu menej ako Lolek.

Koľko čučoriedok mal každý z chlapcov?

Riešenie:

- a) Spolu mali $3/2$ toho, čo mal Lolek. Lolek mal 40 čučoriedok, Bolek 20.
- b) Spolu mali $5/3$ toho, čo mal Lolek. Lolek mal 36 čučoriedok, Bolek 24.

- N3** Terezka mala o 30 sliviek viac ako Žaneta a tá mala

- a) dvakrát;
- b) trikrát;
- c) štyrikrát

menej sliviek ako Terezka. Koľko sliviek mala Žaneta?

Riešenie:

30 sliviek zodpovedá

- a) počtu;
- b) dvojnásobku;
- c) trojnásobku

Žanetiných sliviek. Žaneta mala

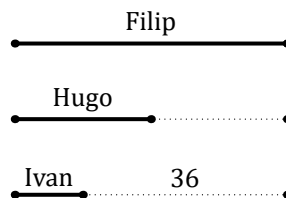
- a) 30;
- b) 15;
- c) 10

sliviek.

- D1** Filip mal dvakrát viac čerešní ako Hugo. Hugo mal dvakrát viac čerešní ako Ivan. Ivan mal o 36 čerešní menej ako Filip. Koľko čerešní mal Hugo?

Riešenie:

Filip mal štyrikrát viac čerešní ako Ivan. Teda 36 čerešní zodpovedá trojnásobku Ivanových čerešní. Ivan mal 12 čerešní, Hugo ich mal 24. Pre prehľadnosť si možno pomôcť úsečkami ako na obrázku nižšie.



- 4 Anežka správne vynásobila určité prirodzené číslo číslom 7 a výsledné päťciferné číslo napísala na papier. Papagáj kus papiera vydobal, a tak sa prvá cifra výsledku stala nečitateľnou. Na zvyšku papiera zostalo napísané 2887.

Aká mohla byť prvá cifra Anežkinho výsledku? Nájdite všetky možnosti.

(Michaela Petrová)

- N1 Miška si vybrala jednociferné číslo. Zistila, že keď ním vynásobí akékoľvek dve rôzne jednociferné čísla, výsledné súčiny budú končiť rôznymi ciframi. Aké mohlo byť Miškino číslo?

Riešenie:

Stačí prejsť výsledky malej násobilky. Miškino číslo mohlo byť 1, 3, 7 alebo 9.

- N2 Určte hodnotu cifry A tak, aby číslo v tvare

a) $\overline{A4}$;

b) $\overline{AA5}$

bolo násobok 9.

Riešenie:

a) Dvojciferný násobok čísla 9 končiacim sa cifrou 4 je iba číslo 54, teda $A = 5$.

b) Trojčiferných násobkov čísla 9 končiacich sa cifrou 5 je 10 (135, 225, 315, 405, 495, 585, 675, 765, 855, 945), ale len pri čísle 225 sa opakuje cifra na prvých dvoch miestach. Teda $A = 2$.

- N3 Ak číslo $\overline{A82}$ vydáme číslom 7, dostaneme zvyšok 0. Aká môže byť cifra A ?

Riešenie:

Posledná cifra podielu musí byť 6, pretože iba súčin $6 \cdot 7$ čiže 42 sa končí cifrou 2. Potom aj delenie $(\overline{A82} - 42) : 7$ čiže $\overline{A40} : 7$ musí vyjsť bezo zvyšku. Teda cifra A je 1 alebo 8.

- D1 Súčin dvojciferných čísel $\overline{AB}$ a $\overline{BA}$ je 7663. Určte cifry A a B .

Riešenie:

Súčin sa končí cifrou 3, teda cifry A a B sú buď 1 a 3, alebo 7 a 9. V prvom prípade vychádza $13 \cdot 31$ čiže 403, v druhom vychádza $79 \cdot 97$ čiže 7663. Číslce A a B sú 7, resp. 9.

- D2 V nasledujúcom algebrograme zastupujú rovnaké písmená rovnaké cifry, rôzne písmená rôzne cifry. O cifrách označených hviezdíčkou nevieme nič bližšie. Nahradte písmená a hviezdíčky ciframi tak, aby bol výpočet správny.

$$\begin{array}{r}
 \\
 \times \\
 \hline
 * \\
 1 \\
 \hline
 * * 8 *
 \end{array}$$

Riešenie:

- Výsledok na poslednom riadku:

Hviezdíčka na mieste jednotiek je 1 a z počítania na mieste desiatok vyplýva $B = 7$.

- Medzivýsledok na treťom riadku:

Z hodnoty na mieste jednotiek vyplýva buď $C = 1$, alebo $C = 9$. V prípade $C = 1$ na mieste desiatok vychádza 7, čo nevyhovuje. V prípade $C = 9$ na mieste desiatok vychádza 1, čo vyhovuje.

- Medzivýsledok na štvrtom riadku sa končí 7, a to je posledná cifra súčinu $9 \cdot A$. Teda $A = 3$. Algebrogram je doriešený nižšie.

$$\begin{array}{r}
 379 \\
 \times 39 \\
 \hline
 3411 \\
 1137 \\
 \hline
 14781
 \end{array}$$

- D3** V nasledujúcom algebrograme zastupujú rovnaké písmená rovnaké cifry, rôzne písmená rôzne cifry. Nahrad'te písmená ciframi tak, aby bol výpočet správny.

$$\begin{array}{r}
 AHA \\
 \times TU \\
 \hline
 PTPT \\
 UPU P \\
 \hline
 UTET T
 \end{array}$$

Riešenie:

Z tvaru medzivýsledkov na treťom a štvrtom riadku vyplýva $H = 0$. Z prvých dvoch cifier vo výsledku na poslednom riadku vyplýva, že P je menšie ako 5 a T je párne. Medzivýsledok na štvrtom riadku sa končí P a to je posledná cifra $A \cdot T$, teda aj P je párne. Preto buď $P = 2$ a $T = 4$, alebo $P = 4$ a $T = 8$. Prvá možnosť vedie k riešeniu nižšie, druhá nevyhovuje.

$$\begin{array}{r}
 808 \\
 \times 43 \\
 \hline
 2424 \\
 3233 \\
 \hline
 34744
 \end{array}$$

- 5** Veky siedmich kamarátov sú 8, 9, 10, 11, 11, 13 a 14 rokov. Traja kamaráti sú práve v kine, dvaja sú na futbale a dvaja doma. Súčet vekov tých v kine je 30 rokov a súčet vekov tých na futbale je 24 rokov. Každý z kamarátov na futbale má viac rokov ako Ondrej, ktorý zostal doma.

Koľko rokov môže mať Ondrej? Nájdite všetky možnosti.

(Marián Macko)

- N1** Z čísel 3, 4, 5, 6, 7 vytvorte všetky dvojice čísel, ktorých súčet je

- a) rovný 9;
- b) menší ako 9.

Riešenie:

- a) Sú to dvojice (3, 6) a (4, 5).
- b) Sú to dvojice (3, 4) a (3, 5).

- N2** Z čísel 11, 15, 19, 31, 35, 39 vytvorte tri dvojice s rovnakými súčtami.

Riešenie:

Súčet všetkých čísel je 150, teda súčet čísel v jednej dvojici má byť 50. Vyhovujú dvojice (11, 39), (19, 31) a (15, 35).

- N3** Z čísel 2, 3, 4, 5, 6 vyberte dve dvojice s rovnakými súčtami. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie:

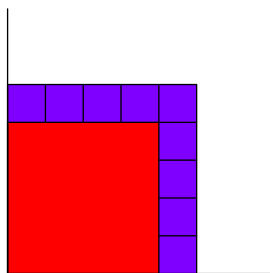
Čísel je päť, teda jedno sa pri tvorbe dvojíc vynechá. Tri čísla sú párne a dve nepárne, teda nemožno vynechať nepárne číslo. Vyhovujú dvojice dvojíc (3, 6) a (4, 5), (3, 5) a (2, 6), (2, 5) a (3, 4).

- D1** Z čísel 5, 6, 8, 9, 11, 13 zostavte dve trojice s rovnakými súčtami.

Riešenie:

Súčet všetkých čísel je 52, teda súčet čísel v jednej trojici má byť 26. Vyhovujú trojice (5, 8, 13) a (6, 9, 11).

- 6** Štyri dievčatá dláždili štvorcovými dlaždicami terasu v rohu dvora. Viola používala dlaždice so stranou 1 dm, Ruženka so stranou 2 dm, Bianka so stranou 3 dm a Karmen so stranou 4 dm. Prvé z dievčat položilo jednu zo svojich dlaždíc do rohu. Druhé položilo svoje dlaždice pozdĺž voľných strán predchádzajúcej dlaždice a pridalo jednu navyše tak, aby vznikol štvorec (napríklad ako na obrázku).



Podobným spôsobom položilo svoje dlaždice tretie a nakoniec aj štvrté dievča. Takto pokryli štvorcovú terasu bez medzier a prekryvov.

V akom poradí mohli dievčatá klást' dlaždice a koľko dlaždíc celkovo použili? Nájdite všetky možnosti.

(Marián Macko)

V nasledujúcich úlohách lemom obdĺžnika rozumieme súvislý stále rovnako široký pás, ktorý ho obklopuje. Lem vzťahujúci sa len k niektorým stranám obdĺžnika je zvyšnými stranami ohraničený podobne ako fialový lem okolo dvoch strán karmínového štvorca na obrázku v súťažnej úlohe. Dlaždice v lemoch sa neprekrývajú, ani nie sú položené na sebe. Šírka lemu zodpovedá veľkosti jednej dlaždice.

- N1** Okolo štvorcovej dlaždice so stranou 5 dm vytvorte lem zo štvorcových dlaždíc so stranou 1 dm. Koľko dlaždíc je potrebných na lem?

Riešenie:

Pozdĺž každej strany veľkej dlaždice je potrebných 5 malých dlaždíc, na rohoch ďalšie 4. Celkovo je potrebných $4 \cdot 5 + 4$ čiže 24 dlaždíc.

- N2** Okolo dvoch susedných strán štvorcovej dlaždice so stranou 6 dm vytvorte lem zo štvorcových dlaždíc so stranou 2 dm. Okolo tohto lemu vytvorte ešte jeden lem zo štvorcových dlaždíc so stranou 4 dm. Dá sa to? Ak áno, koľko dlaždíc je potrebných na tieto dva lemy?

Riešenie:

Áno, dá sa to: Na prvý lem bude potrebných $2 \cdot 3 + 1$ čiže 7 dlaždíc so stranou 2 dm, na druhý $2 \cdot 2 + 1$ čiže 5 dlaždíc so stranou 4 dm.

- N3** Okolo troch strán štvorcovej dlaždice so stranou 6 dm vytvorte lem zo štvorcových dlaždíc so stranou 3 dm. Okolo tohto lemu vytvorte ešte jeden lem zo štvorcových dlaždíc so stranou 5 dm. Dá sa to? Ak áno, koľko dlaždíc je potrebných na oba lemy?

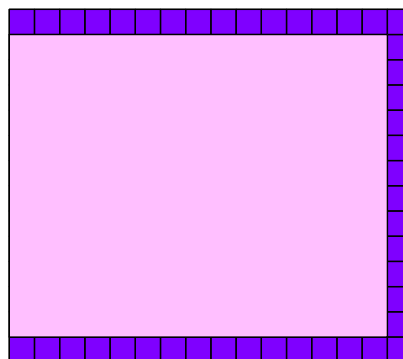
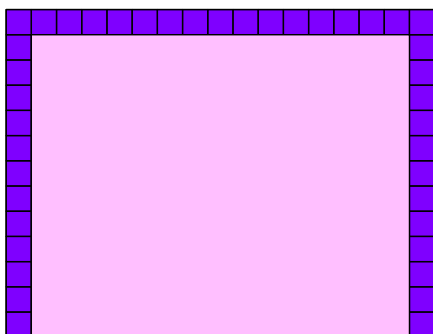
Riešenie:

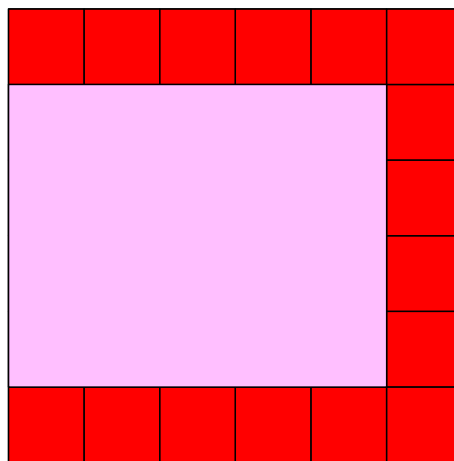
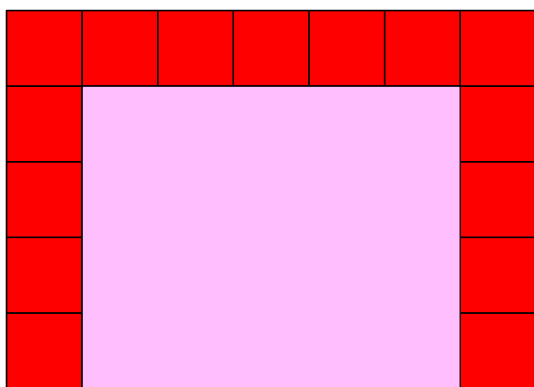
Nie, nedá sa to: Prvý lem sa dá vytvoriť, vzniknutý obdĺžnik bude mať rozmery 9 dm a 12 dm. Druhý lem sa nedá vytvoriť, pretože žiadny z predchádzajúcich rozmerov v dm nie je násobok 5.

- D1** Okolo troch strán obdĺžnikovej dlaždice so stranami 12 dm a 15 dm vytvorte lem zo štvorcových dlaždíc s veľkosťou strany vyjadrenou v dm prirodzeným číslom. Koľko dlaždíc môže mať lem? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie:

Štvorcové dlaždice môžu mať stranu buď 1 dm, alebo 3 dm. Počet použitých dlaždíc závisí od ich veľkosti a od toho, ktorá strana obdĺžnika nie je lemovaná. Dlaždíc prvého typu môže byť $2 \cdot 12 + 15 + 2$ čiže 41 alebo $2 \cdot 15 + 12 + 2$ čiže 44. Dlaždíc druhého typu môže byť $2 \cdot 4 + 5 + 2$ čiže 15 alebo $2 \cdot 5 + 4 + 2$ čiže 16.





-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Iveta Jančígová
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajči