

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

## Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z7

---

- 1 Koľko štvorciferných čísel má tú vlastnosť, že ich tretina, polovica, dvojnásobok a trojnásobok sú tiež štvorciferné čísla?

(Marian Macko)

**N1** Nájdite

- najmenší dvojciferný násobok 5, ktorého polovica je dvojciferné číslo;
- najväčší dvojciferný násobok 6, ktorého dvojnásobok je dvojciferné číslo;
- najmenší dvojciferný násobok 8, ktorého pätina je dvojciferné číslo.

**Riešenie:**

- Číslo je násobok 10, nesmie byť menšie ako 20, najmenšie vyhovujúce je 20.
- Číslo je násobok 6, nesmie byť väčšie ako 49, najväčšie vyhovujúce je 48.
- Číslo je násobok 40, nesmie byť menšie ako 50, jediné vyhovujúce je 80.

- N2** Z číier 2, 2, 5, 9 zostavte najväčšie štvorciferné číslo deliteľné 6, ktoré je menšie než 5123.

**Riešenie:**

Medzi danými ciframi sú párne cifry a súčet všetkých čifier je 18, čo je číslo deliteľné 3. Teda z daných čifier možno zostaviť čísla deliteľné 6. Najväčšie vyhovujúce je 2952.

- N3** Koľko je párnych čísel väčších než 123 a menších než 321?

**Riešenie:**

Vyhovujúce čísla sú 124 čiže  $2 \cdot 62$ , 126 čiže  $2 \cdot 63$ , ..., 320 čiže  $2 \cdot 160$ . Týchto čísel je  $160 - 62 + 1$  čiže 99

- D1** Zistite, koľko päťciferných čísel má nasledujúce dve vlastnosti:

- V čísle sa opakuje jedna cifra trikrát, zvyšné dve cifry sú rôzne.
- Tridsatina tohto čísla je trojciferné číslo.

**Riešenie:**

Podľa druhej podmienky ide o päťciferné čísla deliteľné 3 a 10, ktoré sú menšie ako 30000. Teda cifra na poslednom mieste je 0 a na prvom mieste je buď 1, alebo 2. Podľa prvej podmienky sa niektorá cifra opakuje trikrát.

Ak sa opakujú tri prostredné cifry, tak ciferný súčet (a teda aj číslo samotné) nie je deliteľný 3. Také číslo neexistuje.

Ak sa trikrát opakuje prvá cifra (1 alebo 2), tak zostávajúca cifra môže byť 3, 6 alebo 9, a to na troch možných miestach. Takýchto čísel je  $2 \cdot 3 \cdot 3$  čiže 18.

Ak sa trikrát opakuje posledná cifra (0) a prvá cifra je 1, resp. 2, tak zostávajúca cifra môže byť 2, 5 alebo 8, resp. 1, 4 alebo 7, a to vždy na troch možných miestach. Takýchto čísel je  $2 \cdot 3 \cdot 3$  čiže 18.

Všetkých vyhovujúcich čísel je teda  $18 + 18$  čiže 36.

- 
- 2 V pravidelnom šesťuholníku  $ABCDEF$  je bod  $G$  stred uhlopriečky  $AE$ .

Určte pomer obsahov trojuholníka  $ADG$  a šesťuholníka  $ABCDEF$ .

(Eva Semerádová)

- N1** Nájdite aspoň dva spôsoby, ako rozdeliť pravidelný šesťuholník na

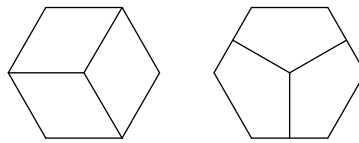
- a) 3;
- b) 6;
- c) 12

navzájom zhodných častí.

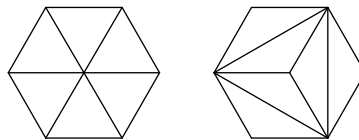
**Riešenie:**

Napríklad:

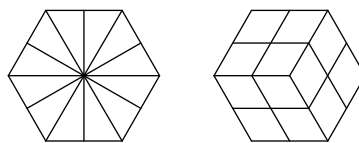
a)



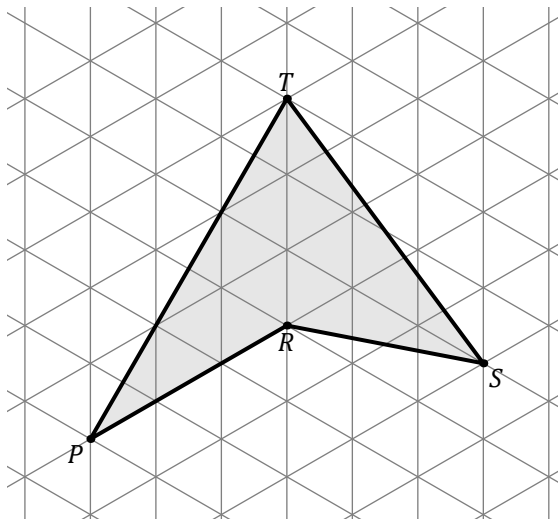
b)



c)

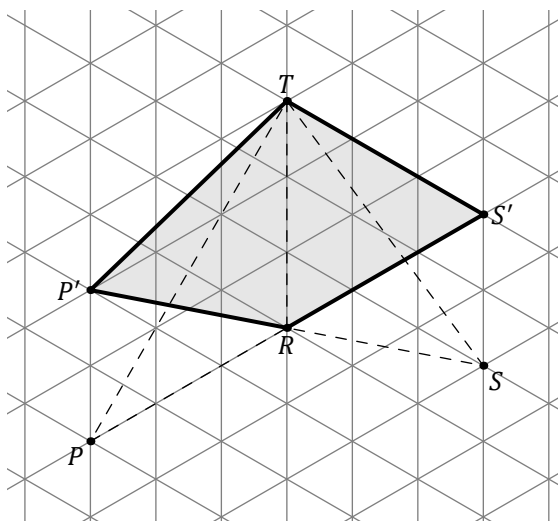


**N2** Vrcholy štvoruholníka  $PRST$  sú mrežové body trojuholníkovej siete, ktorej základný trojuholník má obsah  $1 \text{ cm}^2$ . Určite obsah štvoruholníka  $PRST$ .



**Riešenie:**

Trojuholníky  $RTP$  a  $RTP'$ , resp. trojuholníky  $RTS$  a  $RTS'$  na nasledujúcom obrázku majú rovnaký obsah (majú spoločnú stranu  $RT$  a rovnaké výšky na túto stranu). Teda štvoruholník  $PRST$  má rovnaký obsah ako štvoruholník  $P'RS'T$ , a ten je kosoštvorec pozostávajúci z 18 základných trojuholníkov. Obsah štvoruholníka  $PRST$  je teda  $18 \text{ cm}^2$ .



**N3** Trojuholník  $ADE$  je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole  $D$ . Na strane  $AD$  ležia body  $B$  a  $C$  tak, že  $|AB| = |BC| = |CD|$ . Zistite pomery obsahov trojuholníkov  $ADE$ ,  $ABE$ ,  $BCE$ ,  $BDE$ .

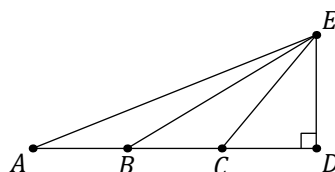
**Riešenie:**

Všetky trojuholníky majú spoločný vrchol  $E$  a rovnaké zodpovedajúce výšky. Teda pomery ich obsahov sú rovnaké ako pomery ich strán oproti vrcholu  $E$ . Potom platí

$$S(ABE) = S(BCE) = \frac{1}{3}S(ADE)$$

a

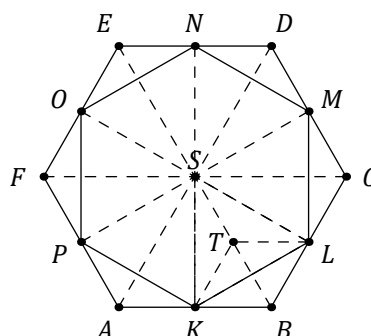
$$S(BDE) = 2 \cdot S(BCE) = \frac{2}{3}S(ADE).$$



**D1** V pravidelnom šesťuholníku  $ABCDEF$  sú body  $K, L, M, N, O, P$  postupne stredy jeho strán. Určte pomer obsahov šesťuholníkov  $ABCDEF$  a  $KLMNOP$ .

**Riešenie:**

Šesťuholníky majú spoločný stred  $S$ . Trojuholník  $KLS$  je rovnostranný a možno ho rozdeliť na 3 zhodné rovnoramenné trojuholníky so spoločným vrcholom  $T$ . Tie sú zhodné s trojuholníkom  $KBL$ , teda pomer obsahov štvoruholníka  $KLS$  a trojuholníka  $KBL$  je  $4 : 3$ . Zo súmernosti celého útvaru vyplýva, že rovnaký je aj pomer obsahov šesťuholníkov  $ABCDEF$  a  $KLMNOP$ .



**3** Páni Komický, Elegantný a Vážny sa poznajú z golfu. Jeden sa volá Karol, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu krémovej farby, jeden ebenovej farby a jeden vínovej farby.

- Výherca posledného zápasu nosí kravatu ebenovej farby.
- Pán Elegantný nebol nikdy na návšteve u pána Komického.
- Viktor nosí krémovú kravatu.
- Pánovi Komickému pripadá vtipné, že nikdy nevyhral.

- Karol bol po poslednom stretnutí na návšteve u pána Komického.
- Pán Vážny nosí kravatu vínovej farby.

Zistite, aké je vlastné meno každého z pánov a kto nosí akú kravatu.

(Erika Novotná)

**N1** Zebra, žirafa, slonica a tigrica se každá venuje inému zimnému športu.

- Zebra, ani žirafa sa nesánkujú.
- Slonica sa nelyžuje.
- Tigrica nehrá hokej.
- Zebra sa kamaráti s lyžiarkou a hokejistkou.
- Tigrica sa kamaráti s bobistkou a sánkarkou.

Zistite, kto robí ktorý šport.

**Riešenie:**

Zebra sa nesáňkuje, nelyžuje, ani nehrá hokej, teda bobuje.

Tigrica nehrá hokej, nebobuje, ani sa nesáňkuje, teda lyžuje.

Žirafa sa nesáňkuje, nebobuje, ani nelyžuje, teda hrá hokej.

Na slonicu zostáva sáňkovanie, čo je v súlade s informáciou zo zadania.

**N2** Režisér potreboval do televíznej rozprávky štyri psy. Dostal ponuku z Grécka, Belgicka, Írska a z Dolnej Lehoty. Vybral ovčiaka, dalmatína, vlkodava a jazvečíka, každého z inej krajiny, s rôznym menom a rôznym vekom.

- Najstarší zo psov bol jazvečík, mal 5 rokov.
- Bucky bol z nich druhý najmladší.
- Vlkodav pochádzal z Írska.
- Pes z Dolnej Lehoty sa volal Dunčo.
- Oddy oslávil včera svoje štvrté narodeniny.
- Ovčiak pochádzal z Belgicka.
- Rubby nebol dalmatín.
- Vlkodav mal tri roky.
- Najmladší z vybraných psov bol Rubby, mal dva roky.

Zistite, ako sa každý zo štyroch psov volal, odkiaľ pochádzal, akej bol rasy a koľko mal rokov.

**Riešenie:**

Všetky vzťahy je možné postupne dopĺňať do tabuľky nižšie:

| vek     | rasa    | meno  | krajina      |
|---------|---------|-------|--------------|
| 2 roky  | ovčiak  | Rubby | Belgicko     |
| 3 roky  | vlkodav | Bucky | Írsko        |
| 4 roky  | ovčiak  | Oddy  | Grécko       |
| 5 rokov | ovčiak  | Dunčo | Dolná Lehota |

(70. ročník MO, úloha Z5-I-3.)

**D1** V troch susedných domoch v radovej zástavbe bývali Xénia, Yveta a Zita so svojimi domácimi zvieratkami. Každá chovala jedno: morča, psa alebo mačku.

- Xénia býva vedľa domu so psom.
- Morča a mačka nebývajú v susedných domoch.
- Zita nemá mačku.
- Morča nebýva vedľa Yvety.

S kým býva pes?

**Riešenie:**

Podľa druhej informácie morča a mačka bývajú v krajných domoch, takže pes je uprostred. Prvá informácia hovorí, že Xénia býva v niektorom z krajných domov. Zvyšné informácie určujú, že Yveta býva s morčatom alebo s mačkou a Zita býva so psom.

**D2** Do triedy pribudol nový žiak, o ktorom sa vedelo, že okrem angličtiny vie výborne ešte jeden cudzí jazyk. Traja spolužiaci sa dohadovali, ktorý jazyk to je.

Prvý súdil: „Francúzština to nie je.“

Druhý hádal: „Je to španielčina alebo nemčina.“

Tretí usudzoval: „Je to španielčina.“

Vzápätí sa dozvedeli, že aspoň jeden z nich hádal správne a aspoň jeden nesprávne.

Určte, ktorý z menovaných jazykov nový žiak ovládal.

**Riešenie:**

Keby tým jazykom bola francúzština, potom by všetci traja spolužiaci hádali nesprávne. Keby to bola španielčina, potom by všetci traja hádali správne. Keby to bola nemčina, potom by prví dvaja hádali správne a tretí nesprávne. Nový žiak ovládal nemčinu.

(68. ročník MO, úloha Z8-I-2.)

- 4 Adela, Beáta, Šárka a Julka si natrhali čerešne. Beáta ich mala 5-krát viac ako Adela, Šárka mala o 15 čerešní viac ako Beáta, Julka mala o 200 viac ako Adela.

Najmenej o koľko sa mohli líšiť počty čerešní Šárky a Julky? A koľko čerešní by v takom prípade malo každé z dievčat?

(Karel Pazourek)

- N1 Nájdite každé prirodzené číslo také, že jeho trojnásobok je menší ako toto číslo zväčšené o 33.

**Riešenie:**

Pre neznáme číslo  $n$  má platiť  $3n < n + 33$ , čiže  $n < 16,5$ . Vyhovuje prvých 17 prirodzených čísel.

- N2 Nájdite najbližší násobok 7 k najbližšiemu násobku 15 k najväčšiemu párnemu trojcifernému číslu.

**Riešenie:**

Najväčšie párne trojciferné číslo je 998. Najbližší násobok 15 k 998 je 1005. Najbližší násobok 7 k 1005 je 1008, čo je hľadané číslo.

- N3 Pre čísla  $a, b, c, d$  platí, že  $b$  je o 5 väčšie než  $a$  a  $d$  je o 8 menšie než  $c$ . O koľko sa môžu líšiť

- rozdiely  $a - c$  a  $b - d$ ;
- súčty  $a + c$  a  $b + d$ ;
- súčty  $a + b$  a  $c + d$ ?

**Riešenie:**

Platí  $b = a + 5$  a  $d = c - 8$ .

- Z toho  $b - d = a - c + 13$ , teda uvedené rozdiely sa líšia o 13.
- Ďalej  $b + d = a + c - 3$ , teda uvedené súčty sa líšia o 3.
- Ďalej  $a + b = 2a + 5$  a  $c + d = 2c - 8$ , teda uvedené súčty sa môžu líšiť o ľubovoľnú hodnotu okrem 0 (prvé číslo je nepárne, druhé párne).

- D1 Adam, Boris a Cyril porovnávali, koľko kíl gaštanov nazbierali. Zistili, že aritmetický priemer toho, čo nazbieral Adam s Borisom, je o 10 kíl väčší než Cyrilov príspevok. A aritmetický priemer toho, čo nazbieral Adam s Cyrilom, je o 3 kíl menší než Borisov príspevok. Určte rozdiel medzi aritmetickým priemerom toho, čo nazbierali Boris s Cyrilom, a Adamovým príspevkom.

**Riešenie:**

Množstvo gaštanov (v kg), ktoré jednotliví chlapci nazbierali, označíme ich počiatočnými písmenami a hľadaný rozdiel označíme  $x$ . Potom

$$\frac{a + b}{2} = c + 10,$$

$$\frac{a + c}{2} = b - 3,$$

$$\frac{b + c}{2} = a - x.$$

Súčet týchto troch rovníc dáva

$$a + b + c = a + b + c + 7 - x,$$

čiže  $x = 7$ .

(71. ročník MO, úloha Z9-I-1.)

- 5 Václav mal niekoľko bielych kociek. Na každej kocke zafarbil tri rôzne steny tromi rôznymi farbami, a to červenou, zelenou a modrou. Potom roztriedil kocky do skupín podľa typu zafarbenia tak, že do každej skupiny dal všetky kocky, ktoré vyzerali po vhodnom otočení rovnako.

Najviac koľko skupín mohol Václav vytvoriť?

(Iveta Jančígová)

V nasledujúcich štyroch úlohách sa pod rôznymi zafarbeniami útvaru rozumejú také zafarbenia, ktoré po žiadanom otočení útvaru nevyzerajú rovnako (čo v súťažnej úlohe zodpovedá rôznym Václavovým skupinám).

- N1** Koľkými rôznymi spôsobmi možno zafarbiť

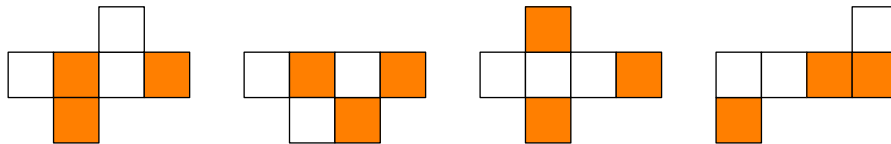
- a) dve;
- b) tri

steny bielej kocky na oranžovo?

**Riešenie:**

- a) Dvoma spôsobmi (zafarbené steny sú buď susedné, alebo oproti sebe).
- b) Dvoma spôsobmi (zafarbené steny buď majú spoločný vrchol, alebo po rozvinutí tvoria pás).

- N2** Rozdeľte nasledujúce zafarbené siete do skupín tak, aby po ich zložení patrili odlišne zafarbené kocky do rôznych skupín.



**Riešenie:**

Vzniknú dve skupiny (porovnajete s predchádzajúcou úlohou): prvý a tretí prípad tvoria prvú skupinu z úlohy N1 b) a druhý a štvrtý druhú.

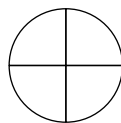
- N3** Koľkými rôznymi spôsobmi možno zafarbiť tri steny bielej kocky tak, aby jedna stena bola modrá a dve červené?

**Riešenie:**

Jeden spôsob je vtedy, keď majú zafarbené steny spoločný vrchol. Dva ďalšie spôsoby sú vtedy, keď zafarbené steny spoločný vrchol nemajú (v rozvinutom páse je modrá buď uprostred, alebo na okraji). Dokopy teda rozlišujeme tri spôsoby.

- D1** Každý z týchto štyroch štvrt'kruhov treba vyfarbiť jednou z daných dvoch farieb. Zistite, koľkými rôznymi spôsobmi sa to dá urobiť, ak za rôzne považujeme zafarbenia, ktoré nevyzerajú rovnako pri:

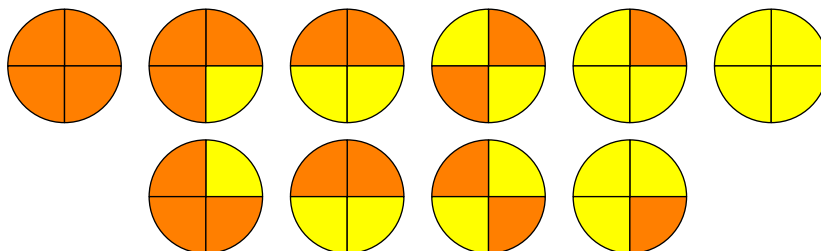
- a) žiadnej osi súmernosti;
- b) žiadnej stredovej súmernosti;
- c) žiadnom otočení.



**Riešenie:**

Všetkých možných zafarbení je 16 (na každú časť možno použiť 2 farby a časti sú 4).

- a) Až na osové súmernosti existuje 6 spôsobov – pozri prvý riadok na obrázku nižšie.
- b) Až na stredové súmernosti existuje 10 spôsobov – pozri všetky možnosti na obrázku nižšie.
- c) Až na otočenie existuje 6 spôsobov a tie sa zhodujú s tými v bode a).



6 Pre štvoruholník  $ABCD$  platí:

- strana  $AD$  a uhlopriečka  $BD$  sú rovnako dlhé,
- uhlopriečka  $BD$  a strana  $DC$  sú kolmé,
- strany  $AB$  a  $BC$  sú kolmé,
- os uhla  $BDC$  a strana  $AD$  sú kolmé.

Určte veľkosť uhla  $BCD$ .

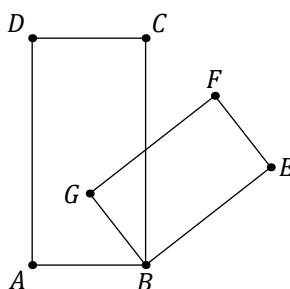
(Marián Macko)

N1 V trojuholníku  $ABC$  sú veľkosti uhlov  $CAB$  a  $ABC$  postupne  $56^\circ$  a  $108^\circ$ . Bod  $S$  je priesečník osí jeho uhlov. Určte veľkosti uhlov trojuholníkov  $ABS$ ,  $BCS$  a  $CAS$ .

**Riešenie:**

Súčet uhlov trojuholníka je  $180^\circ$  a os uhla daný uhol delí na polovicu. Pomocou týchto poznatkov postupne dostaneme, že veľkosť uhla  $ACB$  je  $16^\circ$ , veľkosti uhlov v trojuholníku  $ABS$  sú  $28^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $98^\circ$ , v trojuholníku  $BCS$  sú  $54^\circ$ ,  $8^\circ$ ,  $118^\circ$  a v trojuholníku  $CAS$  sú  $8^\circ$ ,  $28^\circ$ ,  $144^\circ$ .

N2 Nech  $ABCD$  a  $BEFG$  sú obdĺžniky a veľkosť uhla  $ABG$  je  $52^\circ$ . Určte veľkosť uhla  $CBE$ .



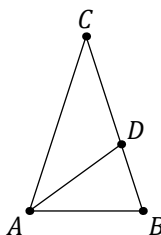
**Riešenie:**

Obdĺžniky zdieľajú spoločný uhol  $GBC$  a vo vrchole  $B$  majú rovnaké vnútorné (pravé) uhly. Teda  $|\sphericalangle ABG| + |\sphericalangle GBC| = |\sphericalangle GBC| + |\sphericalangle CBE| = 90^\circ$ , a preto  $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle ABG|$ . Veľkosť uhla  $CBE$  je teda  $52^\circ$ .

N3 Je daný rovnoramenný trojuholník  $ABC$  so základňou  $AB$  a bod  $D$ , ktorý je priesečník strany  $BC$  a osi uhla  $BAC$ . Ďalej platí, že úsečky  $AD$  a  $DC$  sú zhodné. Určte veľkosti uhlov trojuholníka  $ABC$ .

**Riešenie:**

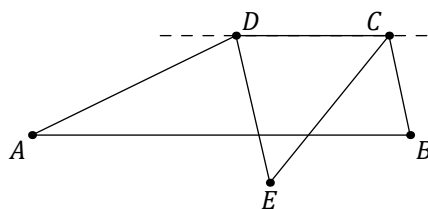
Trojuholník  $ACD$  je rovnoramenný s ramenami  $AD$  a  $DC$ , teda  $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DCA|$ . Tento uhol označme  $\gamma$ . Úsečka  $AD$  je os uhla  $BAC$ , teda  $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DAC| = \gamma$ . Trojuholník  $ABC$  je rovnoramenný s ramenami  $AC$  a  $CB$ , teda  $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle CAB| = 2\gamma$ . Súčet uhlov trojuholníka  $ABC$  je  $5\gamma$ , takže  $5\gamma = 180^\circ$ , a teda  $\gamma = 36^\circ$ . Veľkosti uhlov trojuholníka  $ABC$  sú teda  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  a  $36^\circ$ .



D1 Nech  $ABCD$  je lichobežník so základňami  $AB$  a  $CD$  a veľkosti uhlov  $DAB$  a  $ABC$  sú postupne  $26^\circ$  a  $78^\circ$ . Bod  $E$  je priesečník osí uhlov  $BCD$  a  $CDA$ . Určte veľkosti uhlov trojuholníka  $CDE$ .

**Riešenie:**

Základne sú rovnobežné, teda vonkajšie uhly pri vrcholoch  $C$  a  $D$  sú zhodné s vnútornými uhlami pri vrcholoch  $B$ , resp  $A$ , a to zo striedavosti príslušných uhlov. Súčet vonkajšieho a vnútorného uhla je priamy uhol a os uhla príslušný uhol delí na polovicu. S týmito poznatkami postupne odvodíme, že veľkosti uhlov  $BCD$  a  $ADC$  sú  $102^\circ$ , resp.  $144^\circ$ , veľkosti uhlov  $ECD$  a  $EDC$  sú  $51^\circ$ , resp.  $77^\circ$  a veľkosť uhla  $CED$  je  $52^\circ$ . Veľkosti uhlov trojuholníka  $CDE$  sú  $51^\circ$ ,  $77^\circ$  a  $52^\circ$ .



- 
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
  - preklad: Iveta Jančígová
  - recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajčí