
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domácej prípravy kategórie Z8

- 1 Nájďte všetky trojice navzájom rôznych prvočísel (p, q, r) , pre ktoré platí

$$(p - q) \cdot (r - q) = 195.$$

(Erika Novotná)

- N1 Nájďte všetky dvojice prirodzených čísel (x, y) také, že

$$(x - y) \cdot (x + y) = 105.$$

Riešenie:

Číslo 105 možno rozložiť na dvojice činiteľov $(1, 105)$, $(3, 35)$, $(5, 21)$, $(7, 15)$. Číslo x je väčšie ako y a prvý činiteľ v uvedenom rozklade hovorí o koľko. Hľadané dvojice (x, y) sú potom $(53, 52)$, $(19, 16)$, $(13, 8)$, $(11, 4)$.

- N2 Nájďte všetky dvojice prvočísel takých, že súčin ich súčtu a ich rozdielu je 117.

Riešenie:

Ako v predchádzajúcej úlohe sa určia rozklady čísla 117 na dva činitele a zodpovedajúce dvojice čísel $(59, 58)$, $(21, 18)$, $(11, 2)$. Len poslednú dvojicu však tvoria prvočísla, jediná vyhovujúca dvojica je teda $(11, 2)$.

- D1 Nájďte všetky dvojice navzájom rôznych prvočísel (p, q) také, že

$$p \cdot (p + q) \cdot (p - q) = 315.$$

Riešenie:

Číslo p je väčšie ako q a činitele sú usporiadané takto: $p - q < p < p + q$. Možné rozklady čísla 315 čiže $3^2 \cdot 5 \cdot 7$ na trojice činiteľov s prostredným činiteľom prvočíslom sú $(1, 3, 105)$, $(1, 5, 63)$, $(1, 7, 45)$, $(3, 5, 21)$, $(3, 7, 15)$, $(5, 7, 9)$. Len v poslednom prípade sú však rozdiely medzi susednými činiteľmi rovnaké, takže jediná vyhovujúca dvojica je $(7, 2)$.

-
- 2 Pre rovnobežníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

- bod K je stred úsečky CD ,
- bod K je priesečník priamky CD s osou úsečky BC ,
- bod L je priesečník priamky AB s osou úsečky CD ,
- bod N je priesečník priamky AB s osou úsečky BC ,
- uhol BAD má veľkosť 60° .

Určte pomer obsahov rovnobežníkov $ABCD$ a $KLMN$.

(Marián Macko)

- N1 V obdĺžniku $ABCD$ je bod M stred strany AB . Určte pomer obsahov trojuholníka AMD a štvoruholníka $MBCD$.

Riešenie:

Stred strany CD označíme N . Úsečka MN rozdeľuje obdĺžnik na dva zhodné obdĺžniky. Uhlopriečka MD rozdeľuje obdĺžnik $AMND$ na dva zhodné trojuholníky, z ktorých jeden je AMD . Hľadaný pomer obsahov je teda $1 : 3$.

- N2 V trojuholníku ABC platí, že bod M je stred strany AC a úsečky MA , MB , AB sú zhodné. Určte pomer obsahov trojuholníkov ABM a MBC .

Riešenie:

Trojuholníky ABM a MBC majú spoločnú stranu MB a vrcholy A , M , C ležia na jednej priamke. Teda pomer obsahov trojuholníkov ABM a MBC je rovnaký ako pomer dĺžok strán AM a MC , t. j. $1 : 1$.

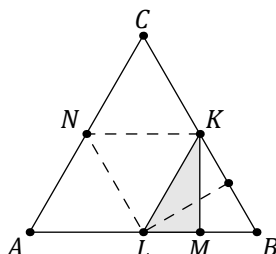
- N3 Na stranách rovnostranného trojuholníka ABC sú body K , L a M také, že platí:

- Bod K je stred strany BC .
- Bod L je priesečník strany AB s osou úsečky KB .
- Bod M je stred úsečky BL .

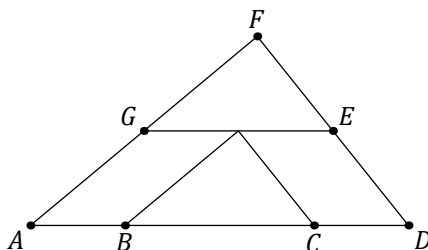
Určte pomer obsahov trojuholníkov KLM a ABC .

Riešenie:

Bod L je stredom strany AB . Stred strany AC označíme N . Úsečky KL , KN , LN delia trojuholník ABC na štyri zhodné trojuholníky a úsečka KM delí jeden z týchto trojuholníkov na dva zhodné trojuholníky. Hľadaný pomer obsahov je teda $1 : 8$.



- D1** Trojuholník ADF je rozdelený na dva trojuholníky GEF a BCH a dva rovnobežníky $ABHG$ a $CDEH$. Trojuholníky GEF a BCH sú zhodné a bod H leží na ťažnici trojuholníka ADF , ktorá prechádza vrcholom F . Určte pomer obsahov trojuholníka GEF a rovnobežníka $CDEH$.

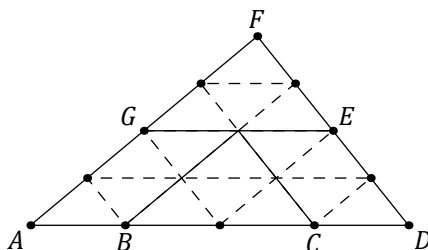


Riešenie:

Zo zadáných vzťahov vyplýva, že úsečka GE je stredná priečka trojuholníka ADF , bod H je jej stred a všetky štyri čiastkové útvary majú rovnaké výšky na strany rovnobežné s AD , takže všetky štyri majú rovnaké obsahy. Hľadaný pomer je teda $1 : 1$.

Poznámka:

Keď sa útvar ďalej rozdelí na menšie zhodné trojuholníky, dá sa dôjsť k rovnakému záveru.



- 3** Tomáš zbiera pohľadnice z Islandu, Anglicka a Nórska. Z každej krajiny má aspoň jednu pohľadnicu, celkovo ich má 40. Pohľadníc z Anglicka má viac ako pohľadníc z Nórska. Pohľadníc z Islandu má viac ako 5-násobok a menej ako 6-násobok počtu pohľadníc z Anglicka.

Z ktorých krajín sú pohľadnice, ktorých počet v Tomášovej zbierke je možné určiť jednoznačne?

(Erika Novotná)

- N1** Laura, Alex a Ivan zbierali na táboře kešky. Každý našiel aspoň jednu, spolu ich nazbierali 23 a Laura ich nazbierala päťkrát toľko čo Ivan. Koľko kešiek mohol nazbierať Alex? Určte všetky možnosti.

Riešenie:

Ivan mal najmenej 1 a najviac 3 kešky (pri 4 a viac by Laura mala 20 a viac, teda spolu viac ako 23). Ak mal Ivan 1, 2, resp. 3 kešky, tak Laura mala 5, 10, resp. 15 a Alex ich mal 17, 11, resp. 5.

- N2** Jakub dal kamarátom za úlohu uhádnuť číslo, na ktoré myslí. Prezradil, že ide o dvojčiferné číslo menšie než sedemnásobok najväčšieho jednociferného čísla a väčšie než druhá mocnina počtu dní v týždni. Keby svoje

číslo vydělil 8, dostal by počet svojich šiltoviek. Môžu kamaráti určiť Jakubovo číslo, aj keď nepoznajú počet jeho šiltoviek?

Riešenie:

Číslo je v rozpätí od 49 do 63 a je deliteľné 8, takže môže ísť iba o číslo 56. Jakubovo číslo sa dá určiť, aj keď počet šiltoviek nie je vopred známy. (Z výsledku vyplýva, že ich mal 7.).

- N3** Andrea zbiera pohľadnice z Arménska, Belgicka a Číny. Z každej krajiny má aspoň jednu pohľadnicu. Pohľadníc z Arménska má menej než pohľadníc z Belgicka. Pohľadníc z Číny má viac než päťnásobok a menej než šesťnásobok počtu pohľadníc z Belgicka. Zdenko sa z týchto informácií snažil zistiť, koľko vlastne má Andrea pohľadníc, ale nevedel si rady. Andrea mu pomohla tým, že prezradila, že v jej prípade tieto podmienky určujú počty pohľadníc z jednotlivých krajín jednoznačne. Koľko má Andrea pohľadníc?

Riešenie:

Počet pohľadníc z Číny je podmienkami jednoznačne určený iba vtedy, keď pohľadnice z Belgicka sú 2. Pohľadníc z Číny je 11 a z Arménska je 1 pohľadnica. Andrea má teda 14 pohľadníc.

- D1** Libor zbiera pohľadnice z Andorry, Brazílie, Čiernej Hory a Dánska, spolu ich má menej než 40. Pohľadníc z Brazílie má viac než dvojnásobok a menej než trojnásobok počtu pohľadníc z Andorry. Pohľadníc z Čiernej Hory má viac než pohľadníc z Andorry a menej než pohľadníc z Brazílie. Pohľadníc z Dánska má dvakrát toľko ako pohľadníc z Brazílie. Koľko najmenej a koľko najviac pohľadníc môže mať Libor?

Riešenie:

Pohľadníc z Andorry mal najmenej 2 a najviac 4 (ak by nemal žiadnu alebo iba 1, nespĺňal by podmienku na počet pohľadníc z Brazílie; ak by ich mal viac než 4, nesedel by celkový počet pohľadníc). Libor mohol mať najmenej 20 pohľadníc (2 z Andorry, 3 z Čiernej Hory, 5 z Brazílie, 10 z Dánska) a najviac 39 pohľadníc (4 z Andorry, 8 z Čiernej Hory, 9 z Brazílie, 18 z Dánska alebo 4 z Andorry, 5 z Čiernej Hory, 10 z Brazílie, 20 z Dánska).

-
- 4** Žiaci získali v prvej písomke priemerne 84 bodov. Tí istí žiaci napísali druhú písomku s priemerným ziskom 70 bodov. Štyria z týchto žiakov mali v oboch písomkách po 63 bodov. Priemerný zisk ostatných žiakov v druhej písomke bol 72 bodov.

Určte priemerný počet bodov ostatných žiakov v prvej písomke.

(Iveta Jančígová)

- N1** Adam, Braňo, Cyril, Dano a Emil porovnávali svoje časy v behu na 60 metrov. Braňo dobehol rovnako ako Cyril za 11,2 sekundy, Emil dobehol za 9,3 sekundy a Dano za 10,8 sekundy. Adam svoj čas nechcel prezradiť, ale všetci vedeli, že ich priemerný čas bol 10,6 sekundy. Aký bol Adamov čas?

Riešenie:

Súčet časov všetkých piatich chlapcov bol rovnaký ako päťnásobok priemerného času. Keďže $5 \cdot 10,6 - (11,2 + 11,2 + 9,3 + 10,8) = 10,5$, Adamov čas bol 10,5 sekundy.

- N2** Počas jedného roka zachránil šesťčlenný tím superhrdinov mnoho miest, priemerne každý 11. Thor, Hulk a Iron Man zachránili každý rovnaký počet miest, Kapitán Amerika ich zachránil 5, Ant-Man 7 a Hawkeye 6. Koľko miest zachránil Hulk?

Riešenie:

Súčet miest, ktoré zachránili jednotliví superhrdinovia, je rovnaký ako šesťnásobok priemerného počtu. Keďže $\frac{1}{3}(6 \cdot 11 - 5 - 7 - 6) = 6$, Hulk (rovnako ako Thor a Iron Man) zachránil 16 miest.

- N3** Priemerná výška desiatich najvyšších hôr sveta je 8 378 metrov nad morom. Ako by sa zmenila priemerná výška, keby sme z tohto zoznamu vynechali Annapurnu (8 091 m), K2 (8 611 m) a Makalu (8 485 m)?

Riešenie:

Súčet výšok desiatich najvyšších hôr je 83 780 m, súčet výšok vynechaných hôr je 25 187 m. Priemerná výška zvyšných siedmich hôr je $(83\,780\text{ m} - 25\,187\text{ m})/7$, čo je približne 8 370 m.

- D1** V základnej škole, kam chodí aj Žigmund, každoročne organizujú vedomostnú súťaž, v ktorej každý súťažiaci môže získať najviac 15 bodov. Tento rok bol priemerný bodový zisk súťažiacich zaokrúhlený na desatiny rovný 10,4. Žigmund si po súťaži uvedomil, že niektoré otázky si zle prečítal a odpovedal na niečo iné. Mohol tak mať o 4 body viac, a priemerný bodový zisk zaokrúhlený na desatiny by sa tým zvýšil na 10,6. Určte, najmenej koľko a najviac koľko detí mohlo tento rok súťažiť.

Riešenie:

Pracujeme so zaokrúhlenými číslami, takže skutočný priemerný bodový zisk mohol byť v rozmedzí od 10,35 vrátane po 10,45 okrem hornej hranice. Ak n označuje počet účastníkov súťaže a c celkový súčet bodov

získaných všetkými súťažiacimi, tak spolu s ďalšou podmienkou zo zadania dostávame:

$$10,35 \leq \frac{c}{n} < 10,45,$$

$$10,55 \leq \frac{c+4}{n} < 10,65.$$

Z týchto nerovníc po úpravách vyplýva $40/3 < n < 40$, takže $14 \leq n \leq 39$.

Treba však ešte overiť, že pre každé takéto n existuje vyhovujúca situácia, t. j. že môžu byť splnené podmienky, že každý súťažiaci môže získať najviac 15 bodov a Žigmund najviac 11 bodov. Priemerná hodnota bodového zisku je $\frac{c}{n}$, čo je najviac 10,45, stačí teda, keď každý súťažiaci získa práve túto bodovú hodnotu, lebo tá je najviac 11, a teda aj najviac 15.

Súťaže sa zúčastnilo najmenej 14 a najviac 39 detí.

(73. ročník MO, úloha Z9-I-3.)

5 Je daná kružnica k so stredom S a polomerom 6 cm a priamka p prechádzajúca bodom S . Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B ležia na priamke p ,
- kružnica k sa dotýka strany CD ,
- kružnica k pretína stranu AD v bode K a stranu BC v bode L ,
- $|AK| = |CL| = 1,5$ cm.

(Michaela Petrová)

N1 Je daná kružnica k so stredom S a polomerom 4 cm. Narysujte obdĺžnik $ABCD$, ktorého strany AB , CD a AD sa dotýkajú kružnice k a dĺžky strán BC a CD sú v pomere 2 : 3.

Riešenie:

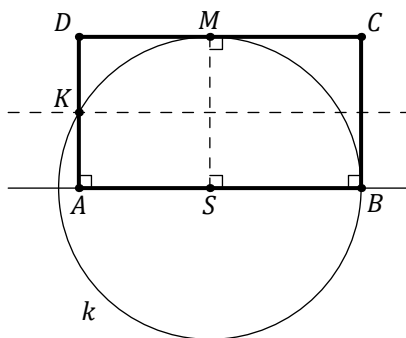
Priemer kružnice k je rovnako dlhý ako strany AD a BC . Teda $|AD| = |BC| = 8$ cm, z čoho $|AB| = |CD| = 12$ cm. Konštrukciu možno začať ľubovoľným priemerom kružnice k a využiť kolmosť strán obdĺžnika na príslušné priemery v bodoch dotyku.

N2 Je daná kružnica k so stredom S a polomerom 6 cm. Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, aby platilo:

- Bod S leží na strane AB .
- Bod B leží na kružnici k .
- Kružnica k sa dotýka strany CD .
- Kružnica k pretína stranu AD v jej strede.

Riešenie:

Polomer kružnice k je rovnako dlhý ako strany AD a BC . Priesečník kružnice k a strany AD leží na osi súmernosti obdĺžnika kolmej na tieto strany a to je priamka rovnobežná so stranou AB vo vzdialenosti 3 cm. Konštrukciu možno začať s ľubovoľným priemerom kružnice k a využiť kolmosť strán obdĺžnika na príslušné priemery v bodoch dotyku.



Vzhľadom na symetrie má úloha 4 riešenia.

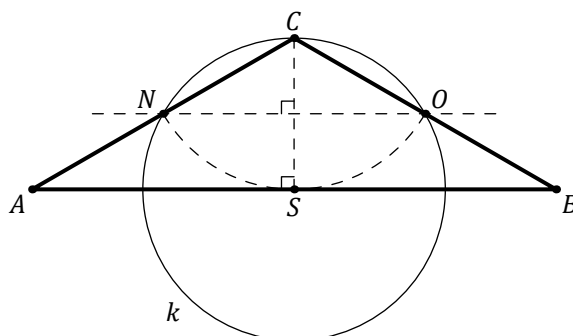
D1 Je daná kružnica k so stredom S . Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC tak, aby platilo:

- Bod S leží na strane AB .
- Bod C leží na kružnici k .
- Ramená AC a BC pretínajú kružnicu k v bodoch N a O .

- Úsečka NO je strednou pričkou trojuholníka ABC .

Riešenie:

Úsečka SC je výškou a osou súmernosti trojuholníka ABC . Body N a O ležia na osi úsečky SC , prípadne tiež na kružnici zhodnej s k so stredom v bode C . Konštrukciu možno začať s ľubovoľným priemerom kružnice k , potom využiť kolmosť NO a SC , kolmosť AB a SC a vlastnosti strednej pričky.



- 6 Jonáš a Michal zostavili každý svoj 8-boký ihlan s 9 rôznymi číslami na jeho rôznych stenách. Všetky čísla boli väčšie ako 10 a menšie ako 30. Pre každý vrchol ihlana platilo, že súčet čísel na všetkých stenách obsahujúcich tento vrchol bol násobkom čísla 4, pritom žiadne číslo násobkom čísla 4 nebolo. Jonáš tvrdil, že na dvoch stenách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvoch stenách má čísla 14 a 17.

Mohli obidvaja chlapci hovoriť pravdu?

(Karel Pazourek)

- N1** Na každej stene štvorstena je napísané jedno číslo, všetky štyri sú rôzne a žiadne z nich nie je deliteľné 3. Pre každý vrchol však súčet čísel na troch stenách, ktoré ho obsahujú, bol deliteľný 3. Ktoré čísla môžu byť napísané na stenách štvorstena? Nájdite aspoň dve možnosti.

Riešenie:

Pre ľubovoľné dve čísla možno tretie doplniť tak, aby bol súčet všetkých troch deliteľný 3. Aby bol súčet čísel na ktorýchkoľvek troch stenách deliteľný 3, musia mať všetky čísla po delení 3 rovnaký zvyšok, teda každé dve čísla sa líšia o násobok 3. Riešení je nekonečne veľa, dve vyhovujúce štvorice sú napríklad 1, 4, 7, 10 alebo 2, 5, 8, 11.

- N2** Na rôznych stenách sú rôzne nenulové prirodzené čísla, pričom súčet čísel na každých dvoch protiľahlých stenách je deliteľný 4 a najväčšie z použitých čísel je čo najmenšie. Ktoré čísla sú na kocke?

Riešenie:

Pre ľubovoľné číslo na jednej stene možno číslo na protiľahlej stene doplniť tak, aby ich súčet bol deliteľný 4. Na protiľahlých stenách kocky sú teda dvojice čísel (1, 7), (2, 6), (3, 5).

- N3** Na rôznych stenách sú rôzne nenulové prirodzené čísla, súčet čísel na každej dvojici susedných stien je deliteľný 4 a najväčšie z použitých čísel bolo čo najmenšie. Ktoré čísla sú na kocke?

Riešenie:

Zvyšky čísel na troch stenách s ľubovoľne zvoleným spoločným vrcholom označme a, b, c . Potom sú všetky tri čísla $a + b, b + c, c + a$ deliteľné 4, takže buď $a = b = c = 2$ alebo $a = b = c = 0$. To znamená, že všetky čísla na kocke majú po delení rovnaký zvyšok, a to 2 alebo 0. Najmenšie použiteľné čísla sú teda 2, 6, 10, 14, 18, 22.

- D1** Vrcholom šesťbokého ihlana sú priradené prirodzené čísla tak, že rôzne vrcholy majú rôzne čísla a pre každú stenu je súčet čísel vo všetkých jej vrcholoch deliteľný 4. Dokážte, že zvyšok, ktorý dáva číslo pri hlavnom vrchole po delení 4, je 0.

Riešenie:

Dokážeme, že po delení 4 dáva číslo pri hlavnom vrchole rovnaký zvyšok ako súčet čísel pri vrcholoch podstavy. V nasledujúcej tabuľke sú postupne pre všetky možné zvyšky pri hlavnom vrchole rozpísané možné zvyšky pri ostatných šiestich vrcholoch tak, aby platila požiadavka pre každú stenu obsahujúcu hlavný vrchol. V poslednom stĺpci je zvyšok zodpovedajúci ich súčtu. Požiadavka pre podstavu ihlana platí iba v prvých štyroch prípadoch.

hlavný	ostatné	súčet
0	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	0
0	(1, 3, 1, 3, 1, 3)	0
0	(2, 2, 2, 2, 2, 2)	0
0	(3, 1, 3, 1, 3, 1)	0
1	(0, 3, 0, 3, 0, 3)	1
1	(1, 2, 1, 2, 1, 2)	1
1	(2, 1, 2, 1, 2, 1)	1
1	(3, 0, 3, 0, 3, 0)	1
2	(0, 2, 0, 2, 0, 2)	2
2	(1, 1, 1, 1, 1, 1)	2
2	(2, 0, 2, 0, 2, 0)	2
2	(3, 3, 3, 3, 3, 3)	2
3	(0, 1, 0, 1, 0, 1)	3
3	(1, 0, 1, 0, 1, 0)	3
3	(2, 3, 2, 3, 2, 3)	3
3	(3, 2, 3, 2, 3, 2)	3

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - preklad: Iveta Jančígová
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajči