

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

1 Pre reálne čísla x a y sú čísla $x + y$ a $x^2 + y^2$ celé. Musí byť aj číslo $x^3 + y^3$ celé?

(Tomáš Bárta)

Riešenie:

Nech $x = (1 + \sqrt{3})/2$ a $y = (1 - \sqrt{3})/2$. Potom

$$x + y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 1$$

a

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{4} + \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4} = 2,$$

ale

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1 + 3\sqrt{3} + 3(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3}{8} + \frac{1 - 3\sqrt{3} + 3(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3}{8} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3}{8} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Takže nemusí platiť, že za daných podmienok je $x^3 + y^3$ celé číslo.

Poznámka:

Hoci je uvedené riešenie úplné, vysvetlíme, ako dvojicu (x, y) nájsť. Platí

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

Keďže $x + y$ je celé číslo, je aj $(x + y)^3$ celé číslo. To znamená, že $x^3 + y^3$ je celé číslo práve vtedy, keď $3xy(x + y)$ je celé číslo. Ďalej

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

teda

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2}.$$

Čísla $(x + y)^2$ a $x^2 + y^2$ sú celé, a ak budú mať rôznu paritu, tak xy bude tvaru $m/2$, kde m je nepárne celé číslo. Platí tak

$$3xy(x + y) = \frac{3m(x + y)}{2},$$

teda ak $x + y$ bude nepárne číslo, tak $3xy(x + y)$ nebude celé číslo, a preto ani $x^3 + y^3$ nebude celé číslo. Stačí teda, aby $x + y$ bolo nepárne a $x^2 + y^2$ párne. Napríklad v prípade $x + y = 1$ a $x^2 + y^2 = 2$ (napríklad vyriešením kvadratickej rovnice vzniknutej z $x^2 + (1 - x)^2 = 2$) dostaneme $x = (1 + \sqrt{3})/2$ a $y = (1 - \sqrt{3})/2$ z uvedeného riešenia.

Poznámka:

Je tiež možné vyjadriť $x^3 + y^3$ len pomocou $x + y$ a $x^2 + y^2$. Keďže

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2},$$

po dosadení do $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ a následnej úprave dostaneme

$$x^3 + y^3 = \frac{(x + y)(3(x^2 + y^2) - (x + y)^2)}{2}.$$

Rozborom parít čísel $x + y$ a $x^2 + y^2$ dostaneme, že $x^3 + y^3$ nie je celé číslo práve vtedy, keď je $x + y$ nepárne číslo a $x^2 + y^2$ párne.

Poznámka:

Reálne čísla x, y , pre ktoré sú hodnoty $x + y$ a $x^2 + y^2$ celé, no $x^3 + y^3$ celé nie je, sú práve také, že

$$\{x, y\} = \left\{ \frac{1}{2}(s + \sqrt{r}), \frac{1}{2}(s - \sqrt{r}) \right\},$$

kde s je nepárne celé číslo a $r = 4k + 3$, kde k je prirodzené číslo.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné body z vyššie popísaných postupov nasledovne:

A1 Vyjadrenie $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, kde člen $3xy(x + y)$ je zapísaný v súčinovom tvare: 1 bod.

B1 Vyjadrenie $xy = ((x + y)^2 - (x^2 + y^2)) / 2$: 1 bod.

B2 Dôkaz, že ak $x + y$ a $x^2 + y^2$ majú rôznu paritu, tak xy nie je celé číslo: 3 body.

C1 Vyjadrenie $x^3 + y^3$ len pomocou $x + y$ a $x^2 + y^2$ (teda bez výskytu xy a podobne): 2 body.

X1 Správna odpoveď bez zdôvodnenia: 0 bodov.

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte väčší z počtov bodov za A1 a B1, za A1 a B2 a za C1.

- 2 Dokážte, že pre nekonečne veľa prirodzených čísel d existujú dve nesúdeliteľné nenulové prirodzené čísla a a b také, že d je najväčší spoločný deliteľ čísel $5a^2 + b$ a $5b^2 + a$.

(Tomáš Bárta)

Riešenie 1:

Uvedieme príklad nekonečne veľa dvojíc (a, b) nesúdeliteľných čísel takých, že hodnoty $\text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ sú navzájom rôzne.

Najskôr prepíšeme $\text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ ako najväčší spoločný deliteľ dvoch výrazov, z ktorých jeden obsahuje iba premennú a . Opakovane pri tom využijeme tvrdenie, ktoré je základom Euklidovho algoritmu, a to, že pre ľubovoľné celé čísla u, v, c platí $\text{nsd}(u, v) = \text{nsd}(u, v + cu)$:

Platí

$$\begin{aligned} \text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a) &= \text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a - 5b(5a^2 + b)) = \text{nsd}(5a^2 + b, -25a^2b + a) \\ &= \text{nsd}(5a^2 + b, -25a^2b + a + 25a^2(5a^2 + b)) = \text{nsd}(5a^2 + b, 125a^4 + a) = \text{nsd}(5a^2 + b, a(125a^3 + 1)). \end{aligned}$$

Nech $b = 125a^3 - 5a^2 + 1$, potom $5a^2 + b = 125a^3 + 1$. Keďže $a \geq 1$, platí

$$b = 125a^3 - 5a^2 + 1 = 5a^2(25a - 1) + 1 \geq 1.$$

Potom

$$\begin{aligned} \text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a) &= \text{nsd}(5a^2 + b, a(125a^3 + 1)) = \text{nsd}(125a^3 + 1, a(125a^3 + 1)) \\ &= \text{nsd}(125a^3 + 1, a(125a^3 + 1) - a(125a^3 + 1)) = \text{nsd}(125a^3 + 1, 0) = 125a^3 + 1. \end{aligned}$$

Pre rôzne a sú hodnoty $125a^3 + 1$ rôzne, vyhovujúcich čísel d zo zadania je teda naozaj nekonečne veľa.

Riešenie 2:

Nech p je prvočíslo rôzne od 5. Nájdeme dvojicu (a, b) nesúdeliteľných nenulových prirodzených čísel takých, že $p \mid \text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a)$. Množina vyhovujúcich čísel d zo zadania bude potom neohraničená, a teda nekonečná.

Zamerajme sa na také dvojice (a, b) , že $b = a + p$. Potom

$$5a^2 + b = (5a^2 + a) + p$$

a

$$5b^2 + a = 5(a + p)^2 + a = (5a^2 + a) + p(10a + 5p).$$

Na to, aby obe čísla $5a^2 + b$ aj $5b^2 + a$ boli násobkami p , stačí zaistiť, že $p \mid 5a^2 + a = a(5a + 1)$, teda a alebo $5a + 1$ je násobok p . (Ak by však bolo a násobok p , aj b čiže $a + p$ by bolo násobok p , takže a a b by boli súdeliteľné.)

Ak zvolíme a tak, že $p \mid 5a + 1$, tak čísla a a b budú nesúdeliteľné: Ak by totiž existovalo prvočíslo q , ktoré by delilo a aj b čiže $a + p$, delilo by aj ich rozdiel p , takže by platilo $q = p$. Mali by sme teda $p \mid 5a + 1$ aj $p \mid a$, z čoho $p \mid 1$, čo je však spor.

Ostáva pre nekonečne veľa prvočísel p nájsť a také, že $p \mid 5a + 1$, t. j. $5a + 1 = kp$ pre vhodné prirodzené číslo k , a teda hľadáme a v tvare $\frac{kp-1}{5}$. Rozoberme prípady:

- Ak $p \bmod 5 = 1$, nech $k = 1$, potom $a = (p - 1)/5$.
- Ak $p \bmod 5 = 2$, nech $k = 3$, potom $a = (3p - 1)/5$.
- Ak $p \bmod 5 = 3$, nech $k = 2$, potom $a = (2p - 1)/5$.
- Ak $p \bmod 5 = 4$, nech $k = 4$, potom $a = (4p - 1)/5$.

V každom prípade je čitateľ deliteľný 5 a kladný, takže a je nenulové prirodzené číslo a platí $5a + 1 = kp$, teda $p \mid 5a + 1$.

Pre každé prvočíslo p rôzne od 5 sme tak našli dvojicu nesúdeliteľných nenulových prirodzených čísel (a, b) takých, že $p \mid \text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a)$.

Poznámka:

Koniec druhého riešenia je možné skrátiť tak, že použijeme tzv. Dirichletovu vetu o aritmetických postupnostiach, že prvočísel každého z tvarov $5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ je nekonečne veľa. Potom namiesto rozlíšenia štyroch prípadov stačí uvážiť ľubovoľný jeden z nich.

Riešenie 3:

Nech $b = 6a + 1$. Potom a a b sú zrejme nesúdeliteľné a platí

$$5a^2 + b = 5a^2 + 6a + 1 = (5a + 1)(a + 1)$$

a

$$5b^2 + a = 5(6a + 1)^2 + a = 5(36a^2 + 12a + 1) + a = 180a^2 + 61a + 5 = (5a + 1)(36a + 5).$$

To znamená, že $\text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ je násobok čísla $5a + 1$.

Keďže čísel tvaru $5a + 1$ je nekonečne veľa, množina vyhovujúcich čísel d zo zadania je neohraničená, a teda nekonečná.

Pokyny:

V neúplných riešeniach, ktoré postupujú podobne ako prvé riešenie (t. j. vyjadrujú $\text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a)$ presne, typicky pomocou Euklidovho algoritmu), udeľte čiastočné body nasledovne:

- A1 Vyjadrenie $\text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a) = \text{nsd}(5a^2 + b, P(a))$, kde $P(a)$ závisí len na a (napr. $P(a) = 125a^4 + a$): 3 body.
- A2 Popis nekonečne veľa nesúdeliteľných dvojíc (a, b) , pre ktoré vyjdú rôzne hodnoty $\text{nsd}(5a^2 + b, 5b^2 + a)$, vrátane zdôvodnenia (napr. $(a, b) = (a, 125a^3 - 5a^2 + 1)$): 6 bodov.
- X1 Chýbajúce zdôvodnenie, že skonštruované čísla a a b sú nesúdeliteľné: mínus 1 bod.

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte väčší z počtov bodov za A1 a za súčet bodov za A2 a X1.

V neúplných riešeniach, ktoré postupujú podobne ako druhé a tretie vzorové riešenie (t. j. ukazujú, že množina vyhovujúcich čísel d obsahuje násobky nekonečne veľa rôznych čísel) udeľte čiastočné body nasledovne:

- B1 Dôkaz, že ak $d \mid 5a^2 + b$ a $d \mid 5b^2 + a$, tak $d \mid (a - b)(5a + 5b - 1)$: 1 bod.
- B2 Dôkaz, že ak $d \mid 5a^2 + b$ a $d \mid 5b^2 + a$, tak $d \mid Q(a)$, kde $Q(a)$ závisí len na a (napr. $Q(a) = 125a^4 + a$): 2 body.
- B3 Dôkaz, že množina vyhovujúcich čísel d obsahuje násobky nekonečne veľa čísel (napr. uvažovaním dvojíc $(\frac{1}{5}(p - 1), \frac{1}{5}(p - 1) + p)$, kde p je prvočíslo tvaru $5k + 1$, alebo dvojíc $(a, 6a + 1)$): 4 body.
- C1 Dokončenie riešenia za predpokladu, že množina vyhovujúcich čísel d obsahuje násobky nekonečne veľa čísel: 2 body.

Celkovo udeľte súčet počtu bodov za C1 a maxima z počtu bodov za B1, za B2 a za B3.

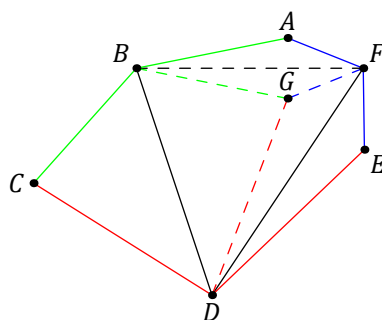
Čiastkové body získané z rôznych schém nemožno kombinovať.

- 3 Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$ taký, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE| \neq |AD|$, $|EF| = |FA|$ a $|\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle FDB|$. Dokážte, že $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle EDC| + |\sphericalangle AFE| = 360^\circ$.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Z podmienky $|\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle FDB|$ vyplýva, že obraz polpriamky DC v osovej súmernosti podľa BD je totožný s obrazom polpriamky DE v osovej súmernosti podľa DF . To spolu s $|CD| = |DE|$ implikuje, že obraz G bodu C v osovej súmernosti podľa BD je totožný s obrazom bodu E v osovej súmernosti podľa DF . Pritom platí $|DG| = |DC| = |DE| \neq |DA|$, takže body A a G sú rôzne.



Z vlastností osovej súmernosti máme $|BG| = |BC| = |BA|$ a $|GF| = |EF| = |FA|$. To spolu s tým, že body A a G sú rôzne, dáva, že sú tieto dva body osovo súmerné podľa BF .

Keďže G je obrazom bodov A, C, E v osových súmernostiach postupne podľa BF, BD, DF a šesťuholník $ABCDEF$ je konvexný, bod G leží vnútri trojuholníka DFB . Platí preto

$$|\angle BGD| + |\angle FGB| + |\angle DGF| = 360^\circ.$$

S využitím osových súmerností ďalej dostávame

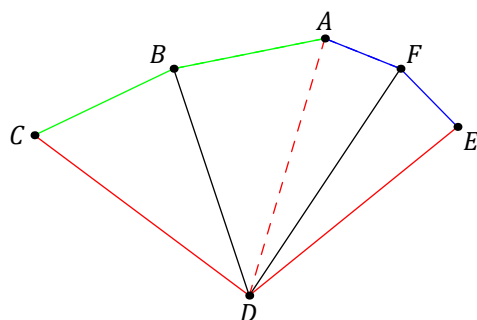
$$|\angle DCB| + |\angle BAF| + |\angle FED| = |\angle BGD| + |\angle FGB| + |\angle DGF| = 360^\circ.$$

Súčet uhlov šesťuholníka $ABCDEF$ je 720° , a preto

$$|\angle CBA| + |\angle EDC| + |\angle AFE| = 720^\circ - (|\angle DCB| + |\angle BAF| + |\angle FED|) = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ.$$

Poznámka:

Podmienka $|AD| \neq |CD| = |DE|$ je dôležitá. V prípade $|AD| = |CD| = |DE|$ by bol G totožný s bodom A a platilo by $|\angle BAF| = |\angle FED| + |\angle DCB|$ namiesto $|\angle FED| + |\angle BAF| + |\angle DCB| = 360^\circ$. Dá sa tak ukázať, že dokazované tvrdenie $|\angle CBA| + |\angle EDC| + |\angle AFE| = 360^\circ$ v tomto prípade nemusí platiť.



Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné body z vyššie popísaných postupov nasledovne:

- A1 Uvedenie, že obraz priamky CD v osovej súmernosti podľa BD je totožný s obrazom priamky DE v osovej súmernosti podľa DF : 1 bod.
- A2 Zdôvodnenie, že obraz bodu C v osovej súmernosti podľa BD je totožný s obrazom bodu E v osovej súmernosti podľa DF : 2 body.
- B1 Dôkaz, že body A a G sú osovo súmerné podľa BF : 2 body.
- X1 Chýbajúce zdôvodnenie, že body A a G sú rôzne: mínus 1 bod.
- C1 Dokončenie riešenia za predpokladu A2 a B1: 2 body.

Celkovo za neúplné riešenia udeľte súčet bodov za:

- maximum počtov bodov za A1 a A2,
- maximum z 0 a súčtu počtu bodov za B1 a X1,
- počtu bodov za C1.

- 4 Pozdĺž kružnice sú napísané aspoň štyri reálne čísla, pričom v každej trojici susedných čísel je jedno z nich súčtom zvyšných dvoch. Dokážte, že niektoré dve zo všetkých napísaných čísel majú rovnakú absolútnu hodnotu.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Predpokladajme, že je možné čísla napísať tak, že žiadne dve nemajú rovnakú absolútnu hodnotu. Budeme sa pozerat' na trojice susediacich čísel. Trojicu (a, b, c) nazveme trojica typu L, ak platí $a = b + c$, typu S, ak platí $b = a + c$, a typu P, ak platí $c = a + b$.

Ukážeme, že trojice susediacich čísel sú buď všetky typu L, alebo všetky typu P.

Nech nie sú všetky typu L. Zoberme ľubovoľnú štvoricu susediacich čísel (a, b, c, d) takú, že (a, b, c) nie je typu L. Rozoberme prípady:

- Nech je (a, b, c) typu S.

Potom $(b, c, d) = (a + c, c, d)$. Ak je typu L, tak $a + c = c + d$, z čoho $a = d$, čo je spor, a ak je typu S, tak $c = a + c + d$, z čoho $a = -d$, čo je spor.

Preto je (b, c, d) typu P.

- Nech je (a, b, c) typu P.

Potom $(b, c, d) = (b, a + b, d)$. Ak je typu L, tak $b = a + b + d$, z čoho $a = -d$, čo je spor, a ak je typu S, tak $a + b = b + d$, z čoho $a = -d$, čo je spor.

Preto je (b, c, d) typu P.

Ak je teda niektorá trojica typu S, tak všetky ďalšie trojice smerom doprava sú typu P, a keďže čísla sú napísané pozdĺž celej kružnice, všetky trojice sú typu P.

Ostáva tak vyriešiť dva prípady: všetky trojice sú typu P alebo všetky trojice sú typu L. Vzhľadom na symetriu sa stačí zaoberať prípadom, keď sú všetky typu P.

Ak by sa medzi číslami vyskytovala 0, pre trojicu $(0, x, y)$, kde x a y sú čísla napravo od 0, by platilo $y = x + 0 = x$, čo by bol spor. Preto sú všetky čísla nenulové.

Označme dve susedné čísla a a b , túto dvojicu nazveme počiatočná. Potom nasleduje $a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots$ Matematickou indukciou sa dokáže, že číslo o i napravo od počiatočnej dvojice je $F_i a + F_{i+1} b$, kde $(F_i)_{i=0}^\infty$ je Fibonacciho postupnosť (definovaná $F_0 = 0, F_1 = 1$, a ak $i \in \mathbb{N}$, tak $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$).

Označme n počet čísel pozdĺž kružnice. Číslo o $n - 1$ napravo od počiatočnej dvojice je číslo a a o n napravo od počiatočnej dvojice je číslo b . Platí preto

$$a = F_{n-1}a + F_n b,$$

$$b = F_n a + F_{n+1} b = F_n a + (F_{n-1} + F_n) b,$$

po úprave

$$a(F_{n-1} - 1) = -F_n b,$$

$$b(F_{n-1} - 1 + F_n) = -F_n a.$$

Po vynásobení rovností a po následnom vykrátení nenulovým číslom ab dostávame

$$(F_{n-1} - 1 + F_n)(F_{n-1} - 1) = F_n^2.$$

Keďže $n \geq 4$, platí $F_{n-1} - 1 \geq 1$. Nech d je najväčší spoločný deliteľ čísel $F_{n-1} - 1$ a F_n a nech k a l sú nesúdeliteľné čísla také, že $F_{n-1} - 1 = dk$ a $F_n = dl$. Potom

$$(dk + dl)dk = (dl)^2,$$

$$(k + l)k = l^2.$$

Keďže k delí ľavú stranu, musí deliť aj pravú. Čísla k a l sú nesúdeliteľné, a preto $k = 1$. Takže platí

$$(l + 1) \cdot 1 = l^2,$$

$$l + 1 = l^2,$$

$$1 = l(l - 1),$$

čo je však spor, lebo 1 nie je súčin dvoch po sebe idúcich celých čísel.

Takže vo všetkých prípadoch sme dostali spor s predpokladom, že je možné čísla napísať tak, že žiadne dve nemajú rovnakú absolútnu hodnotu, preto vždy majú niektoré dve rovnakú absolútnu hodnotu.

Poznámka:

Ukážeme iný spôsob, ako dokázať, že ak $n \geq 4$, rovnosť

$$(F_{n-1} - 1 + F_n)(F_{n-1} - 1) = F_n^2$$

neplatí. Po úpravách dostaneme

$$F_n^2 - F_n(F_{n-1} - 1) - (F_{n-1} - 1)^2 = 0.$$

Číslo F_n je teda koreň kvadratickej rovnice

$$x^2 - x(F_{n-1} - 1) - (F_{n-1} - 1)^2 = 0,$$

tá má však korene $(F_{n-1} - 1) \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Pritom v prípade $n \geq 4$ platí $F_{n-1} - 1 \geq 1$, takže táto kvadratická rovnica má iba iracionálne korene, čo je spor.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné body z vyššie popísaných postupov nasledovne:

A1 Dôkaz, že trojice sú buď všetky typu L, alebo všetky typu P: 2 body.

A2 Prevedenie prípadu, keď sú všetky trojice typu P (alebo typu L) na sústavu dvoch rovníc, napr. $a(F_{n-1} - 1) = -F_n b$ a $b(F_{n-1} - 1 + F_n) = -F_n a$: 1 bod.

A3 Dôkaz, že sústava v A2 nemá riešenie: 3 body.

Celkovo za neúplné riešenia udeľte súčet počtov bodov za A1, za A2 a za A3.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - recenzenti: Peter Novotný, Stanislav Krajčí
 - preklad: Peter Novotný