

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

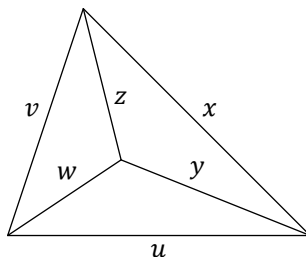
Riešenia úloh domácej prípravy kategórie B

- 1 Každéj hrane štvorstena priradíme jedno reálne číslo tak, aby každá stena mala rovnaký súčet čísel svojich troch hrán. Najviac koľko zo šiestich čísel priradených hranám môže byť navzájom rôznych?

(Mária Dományová)

Riešenie:

Označme čísla na jednotlivých hranách ako na obrázku:



Platí teda

$$u + v + x = u + w + y = v + w + z = x + y + z.$$

Z toho

$$(u + v + x) + (v + w + z) = (u + w + y) + (x + y + z),$$

$$2v = 2y,$$

$$v = y.$$

Analogicky $u = z$ a $w = x$, takže súčet čísel na hranách každej zo stien je zhodne $u + v + w$.

To teda znamená, že zo všetkých 6 čísel sú najviac 3 rôzne. Tento prípad nastane práve vtedy, keď sú rôzne všetky tri čísla u, v, w .

- 2 Prirodzené číslo sa končí dvojčíslím 90. Dokážte, že súčin všetkých jeho kladných deliteľov je druhá mocnina prirodzeného čísla.

(Ján Mazák)

Riešenie:

Číslo označme n . Keďže n sa končí dvojčíslím 90, platí $n = 4 \cdot 25k + 90$, kde k je prirodzené číslo. Je tak deliteľné 2, ale už nie 2^2 čiže 4. Podobne je n deliteľné 5, ale už nie 5^2 čiže 25. Ľubovoľný kladný deliteľ má teda tvar $2^a \cdot 5^b \cdot z$, kde $a, b \in \{0, 1\}$ a z je ľubovoľný kladný deliteľ n nesúdeliteľný s 2 a 5. Zafixovaním dvojice hodnôt a a b a dosadením všetkých možných hodnôt z rozdelíme všetky kladné delitele na 4 rovnako veľké skupiny. Počet jeho deliteľov je teda $4s$, kde s je prirodzené číslo.

Keďže n nie je druhá mocnina (inak by muselo byť deliteľné 2^2 a 5^2), je možné jeho kladné delitele rozdeliť na $2s$ dvojíc so súčinom n , a to $(d, n/d)$, kde d je jeho deliteľ menší $\sqrt{n}$. Súčin všetkých kladných deliteľov n je teda n^{2s} čiže $(n^s)^2$, čo je druhá mocnina prirodzeného čísla n^s .

Poznámka:

V prípade čísla 90 čiže $2 \cdot 5 \cdot 3^2$ máme $z \in \{1, 3, 9\}$ a vyššie popísané skupiny vyzerajú takto:

- $\{2^0 \cdot 5^0 \cdot 1, 2^0 \cdot 5^0 \cdot 3, 2^0 \cdot 5^0 \cdot 9\}$ čiže $\{1, 3, 9\}$,
- $\{2^0 \cdot 5^1 \cdot 1, 2^0 \cdot 5^1 \cdot 3, 2^0 \cdot 5^1 \cdot 9\}$ čiže $\{5, 15, 45\}$,
- $\{2^1 \cdot 5^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 5^0 \cdot 3, 2^1 \cdot 5^0 \cdot 9\}$ čiže $\{2, 6, 18\}$,
- $\{2^1 \cdot 5^1 \cdot 1, 2^1 \cdot 5^1 \cdot 3, 2^1 \cdot 5^1 \cdot 9\}$ čiže $\{10, 30, 90\}$.

- 3 Na tabuli je nakreslená kružnica (bez stredu) a na nej tri rôzne body A, B, C . Máme k dispozícii kriedu a trojuholník s ryskou bez mierky. Ten nám umožňuje len viesť priamku ľubovoľnými dvoma bodmi a na danú priamku viesť kolmicu daným bodom (nie nutne ležiacim na nej). Zostrojte stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC .

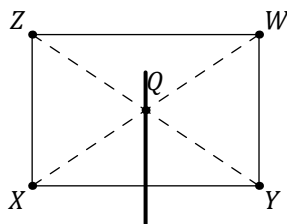
(Ema Čudaiová)

Riešenie 1:

Stred kružnice trojuholníku vpísanej leží je priesečník osí jeho vnútorných uhlov, ich konštrukciu si teraz opíšeme. Najprv si uvedomíme, že os vnútorného uhla pri vrchole A pretne kružnicu opísanú v bode, ktorý je stredom jej oblúka s krajnými bodmi B a C , ktorý neobsahuje bod A , a to vďaka vete o obvodových uhloch. Ak zostrojíme dve takéto osi, ich priesečník bude hľadaný stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC . Stačí teda vedieť zostrojiť stredy oblúkov medzi bodmi A, B, C .

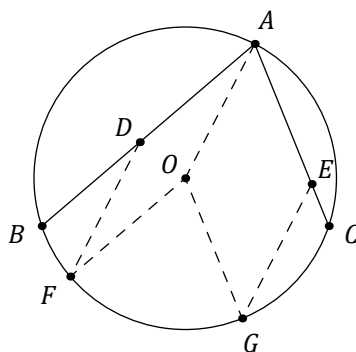
Napríklad stredy oboch oblúkov s krajnými bodmi B a C zostrojíme ako priesečníky danej kružnice (teda kružnice opísanej trojuholníku ABC) s osou strany BC , z nich potom vyberieme ten oblúk, ktorý neobsahuje bod A .

Os ľubovoľnej úsečky XY pomocou daných nástrojov zostrojíme takto: Najprv bodom X vedieme kolmicu na priamku XY a na nej zvolíme bod Z rôznyi od X . Kolmica na XZ vedená bodom Z pretne kolmicu na XY vedenú bodom Y v bode W . Štvoruholník $XYZW$ je zrejme pravouholník a priesečník jeho uhlopriečok Q leží na osi úsečky XY , ktorú získame ako kolmicu na priamku XY vedenú bodom Q .



Riešenie 2:

Hlavnou myšlienkou nasledujúceho postupu je nájsť na ramenách uhla BAC body D , resp. E rovnako vzdialené od vrcholu A a os tohto uhla potom zostrojiť ako os úsečky DE . Na nájdenie týchto bodov využijeme schopnosť viesť daným bodom rovnobežku s danou priamkou. To vieme dvojitém opakovaním konštrukcie kolmice: Ak chceme viesť rovnobežku s priamkou p bodom X , zostrojíme najprv kolmicu q na p bodom X , na q zvolíme ľubovoľný bod Q rôznyi od X a tým vedieme kolmicu na priamku q . Druhou ingredienciou bude stred kružnice O , ktorý zostrojíme ako priesečník osí strán trojuholníka ABC , ktorých konštrukcia je vysvetlená v závere predchádzajúceho riešenia. Keďže $|OB| = |OC|$, stačí túto konfiguráciu posunúť k bodu A .



Bodom O vedme rovnobežku s priamkou AB a jej priesečník s kružnicou, ktorý leží v rovnakej polrovine určenej priamkou AO ako B , označme F . Ďalej zostrojme rovnobežku bodom F na priamku AO a jej priesečník s priamkou AB označme D . Výberom vhodného priesečníka s kružnicou v prvom kroku sme zaručili, že D leží na polpriamke AB .

Analogicky zostrojíme body G a C . Všimnime si, že štvoruholníky $AOFD$ a $AOGE$ sú rovnobežníky, preto platí $|AD| = |OF| = |OG| = |AE|$.

- 4 Reálne čísla x a y spĺňajú nerovnosti $xy \geq x + y > 0$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $x + y$?

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Obe čísla nemôžu byť nekladné, pretože potom by platilo $x + y \leq 0$, a nemôže byť jedno kladné a druhé záporné, pretože potom by platilo $xy < 0$. Obe čísla teda musia byť kladné.

Pre každé dve reálne čísla x a y platí nerovnosť $(x + y)^2 \geq 4xy$, lebo

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0.$$

Nech teraz kladné čísla x a y spĺňajú nerovnosti zo zadania. Potom platí

$$(x + y)^2 \geq 4xy \geq 4(x + y),$$

čo po vydelení kladným číslom $x + y$ dáva $x + y \geq 4$. Táto hodnota je dosiahnuteľná v prípade $x = y = 2$, takže hľadaná najmenšia hodnota výrazu $x + y$ je 4.

Poznámka:

Nerovnosť $(x + y)^2 \geq 4xy$, ktorú sme v riešení vyššie dokázali a využili, je variantom tzv. A-G-nerovnosti (nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom).

Na túto tému existuje mnoho študijných textov, napr. <https://prase.cz/archive/29/9.pdf>.

Riešenie 2:

Nech $s = x + y$, úlohu potom môžeme preformulovať takto: Pre ktoré najmenšie reálne číslo s existujú reálne čísla x a y také, že $xy \geq x + y = s > 0$? Ihneď vidíme, že s musí byť kladné. Vyjadrením a dosadením $y = s - x$ dostávame podmienku $x(s - x) \geq s$, ktorú ďalej upravíme na nerovnosť $x^2 - sx + s \leq 0$. Kvadratický trojčlen s kladným vedúcim koeficientom nadobúda aspoň jednu nekladnú hodnotu, práve keď príslušná kvadratická rovnica má aspoň jeden reálny koreň, čo je ekvivalentné s tým, že jej diskriminant je nezáporný. Platí teda $s^2 - 4s \geq 0$, po vydelení kladným číslom s dostávame ihneď $s \geq 4$. Táto hodnota je dosiahnuteľná v prípade $x = y = 2$, takže hľadaná najmenšia hodnota výrazu s je 4.

- 5 Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$ taký, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC|$ a $|\sphericalangle BCD| = 3|\sphericalangle BAD|$. Body P a Q ležia postupne na úsečkách AB a AD tak, že $APCQ$ je rovnobežník. Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ . Dokážte, že priamky AO a BD sú navzájom kolmé.

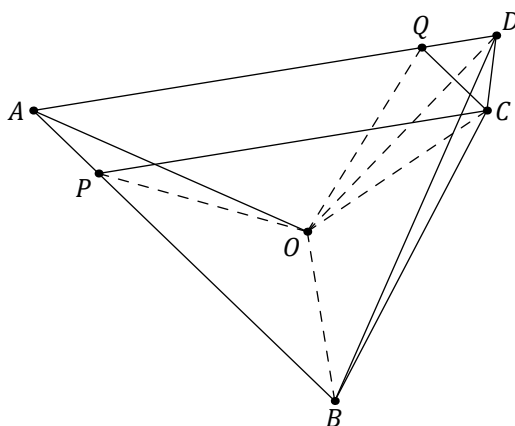
(Patrik Bak)

Riešenie:

Nech $\alpha = |\sphericalangle BAD|$, potom z druhej rovnosti zo zadania máme $|\sphericalangle BCD| = 3\alpha$. Potom

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = \frac{360^\circ - |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle BAD|}{2} = \frac{360^\circ - 3\alpha - \alpha}{2} = 180^\circ - 2\alpha.$$

Z rovnobežnosti PC a AQ vyplýva $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$, trojuholník BCP je teda rovnoramenný so základňou PC . Analogicky je aj trojuholník DCQ rovnoramenný so základňou QC .

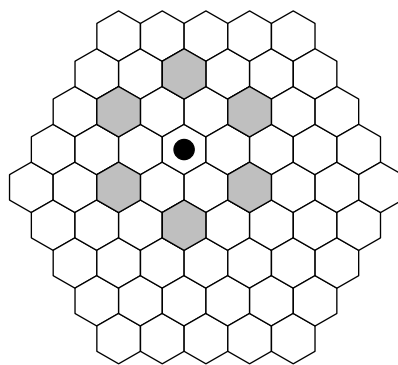


Os úsečky CP prechádza vrcholom B rovnoramenného trojuholníka BCP aj stredom O kružnice opísanej trojuholníku CPQ . Priamka BO je tak kolmá na priamku PC , a teda aj na s ňou rovnobežnú priamku AD . Analogicky sú kolmé DO a AB , čiže O je priesečník výšok v trojuholníku ABD , takže AO je kolmá na BD .

Poznámka:

K rovnoramennosti trojuholníkov BCP a DCQ sa dá dôjsť aj iným spôsobom: Keďže $|\sphericalangle BPC| = \alpha = |\sphericalangle CQD|$ a $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle QDC|$, sú trojuholníky PBC a QDC pri tomto poradí vrcholov podľa vety uu podobné, a teda $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle DCQ|$. Zároveň súčet týchto dvoch (zhodných) uhlov je 2α , pretože $|\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle PCQ| = 3\alpha - \alpha$. Z toho $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle DCQ| = \alpha$ a trojuholníky BCP a DCQ sú rovnoramenné.

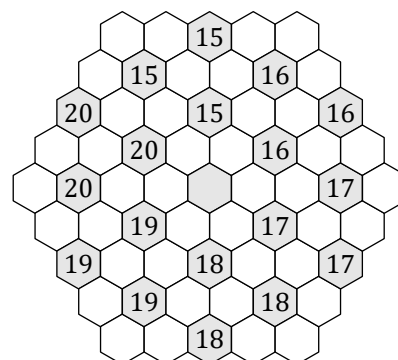
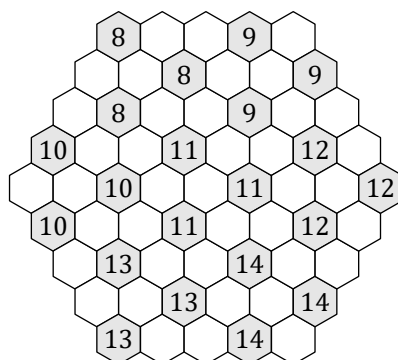
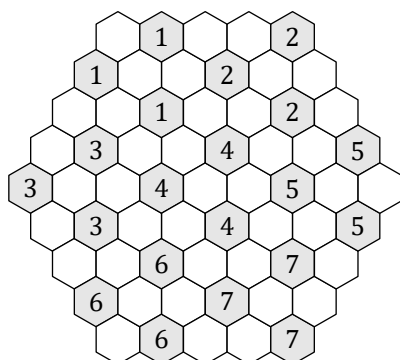
- 6 Hracia plocha na obrázku sa skladá zo 61 pravidelných šesťuholníkov so stranou dĺžky 1. Na každom políčku môže stáť najviac jedna figúrka. Dve figúrky sa ohrozujú práve vtedy, keď stoja na políčkach so stredmi vzdialenými presne 3. (Políčka ohrozené figúrkou na obrázku sú vyfarbené.) Najviac koľko figúrok môžeme umiestniť na túto plochu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?



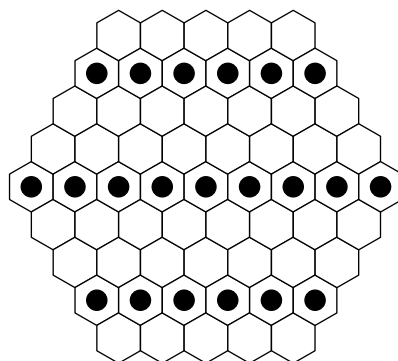
(Jozef Rajník)

Riešenie:

Označme všetky políčka okrem stredového po troch číslami 1 až 20 tak, aby stredy políčk s rovnakými číslami boli vrcholmi rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 3, a to napríklad takto:



Z každej takejto trojice políčk môže byť obsadené najviac 1, počet figúrok na políčkach okrem stredového je teda najviac $20 \cdot 1$ čiže 20. Spolu s prípadnou figúrkou v stredovom políčku je ich preto najviac $20 + 1$ čiže 21. Tento počet možno dosiahnuť napríklad takto:



- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzent: Stanislav Krajčí
- preklad: Peter Novotný