
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh domácej prípravy kategórie C

1 Rozhodnite, či existuje prirodzené číslo zapísané navzájom rôznymi ciframi

- a) 1 až 8,
- b) 1 až 9

také, že každá jeho vnútorná cifra delí dvojciferné číslo tvorené zľava doprava jej susedmi. (Napríklad číslo 1324 má takúto vlastnosť, pretože 3 delí 12 a 2 delí 34.)

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

- a) Vyhovuje napríklad číslo 53174628, pretože 3 delí 51, 1 delí 37, 7 delí 14, 4 delí 76, 6 delí 42 a 2 delí 68.
- b) Nech takéto číslo neexistuje.

Pozrieme sa na deliteľnosť niektorými jednocifernými číslami. Najskôr rozlíšime párne a nepárne cifry. Niektorá párna cifra je určite vnútorná, a potom je párna aj cifra napravo od nej (dvojciferné číslo tvorené susedmi zľava doprava musí byť párne). Opakovaním tejto úvahy zisťujeme, že za prvou párnou vnútornou cifrou už nasledujú iba párne cifry (mohlo by sa však stať, že prvá cifra je párna a oddelená od zvyšných párnych cifier). Špeciálne posledná cifra je párna.

Cifra 5 musí byť prvou cifrou. Keby bola vnútornou cifrou, napravo od nej by bola cifra 0 alebo 5, ale zadanie 0 nepripúšťa a 5 sa neopakuje. Podľa predošlého odseku nemôže byť poslednou cifrou. Keď je prvá cifra 5, teda nepárna, musia párne cifry tvoriť súvislý blok „vpravo“ a nepárne cifry súvislý blok „vľavo“.

Cifra 9 musí byť v bloku nepárnych cifier posledná. Inak by existovalo dvojciferné číslo tvorené ciframi 1, 3, 5, 7 a deliteľné 9. O deliteľnosti 9 rozhoduje ciferný súčet, ale žiadny zo súčtov $1 + 3$, $1 + 5$, $1 + 7$, $3 + 5$, $3 + 7$, $5 + 7$ nie je deliteľný 9.

Cifra 7 (rovnako ako 1 a 3) je teda v bloku nepárnych cifier vo vnútri. Delí tak nejaké dvojciferné číslo tvorené ciframi 1, 3, 5, 9. Z čísel 13, 15, 19, 31, 35, 39, 51, 53, 59, 91, 93, 95 sú iba 35 a 91 deliteľné 7. Lenže cifra 5 je nutne prvá a za cifrou 9 už žiadna nepárna cifra byť nemôže. Pre obe čísla 35 a 91 dostávame spor s pozíciou cifry 5, resp. 9, a preto žiadne vyhovujúce číslo neexistuje.

Riešenie 2:

- a) Ako v riešení 1.
- b) Rovnako ako v prvom riešení zistíme, že vyhovujúce číslo sa skladá z bloku nepárnych cifier, za ktorým nasleduje blok párnych cifier, a že prvou cifrou je 5.

Ukážeme, že napravo od cifry 1 je najviac jedna nepárna cifra. Keby tam boli aspoň dve nepárne cifry – označme ich zľava X a Y – znamenalo by to, že X delí dvojciferné číslo $\overline{1Y}$. To sa stať nemôže, pretože 13, 17 aj 19 sú prvočísla.

Označme druhú cifru A a tretiu B . Z predchádzajúceho odseku vieme, že $A \neq 1$. Dvojciferné číslo $\overline{5B}$ tak nemôže byť 53 ani 59, pretože ide o prvočísla. Nemôže to byť ani 51, pretože by za cifrou 1 boli ešte ďalšie dve nepárne cifry. Preto $B = 7$ a $A = 3$. Za trojčíslím 537 má nasledovať 1 alebo 9, avšak ani jedno z čísel 31, 39 nie je deliteľné 7. Hľadané číslo teda neexistuje.

Poznámka:

Opíšeme ešte, akým spôsobom objaviť číslo 53174628 v časti a). Rovnako ako v časti b) dôjdeme k tomu, že v bloku nepárnych cifier musí byť cifra 5 prvá, a z posledného odseku vyplýva, že v tomto bloku je cifra 7 posledná. Cifry 1 a 3 sú teda vnútorné a navzájom susedné. O deliteľnosti 3 rozhoduje ciferný súčet a zo súčtov $1 + 7$ a $5 + 1$ je iba druhý deliteľný 3. Takže jediné prípustné poradie v rámci bloku nepárnych cifier je 5317.

Párny blok cifier sa musí začať cifrou 4, pretože 7 delí z dvojciferných čísel začínajúcich cifrou 1 iba číslo 14. Potom nasleduje 2 alebo 6, pretože 4 delí 72 a 76. Variant 531742 nemožno predĺžiť ani dvojčíslím 68 ani dvojčíslím 86. Variant 531746 je možné predĺžiť iba dvojčíslím 28. Navyše sme tak ukázali, že číslo 53174628 je jediné možné.

2 Uvažujme prirodzené čísla a, b, c také, že čísla $a, b, c, a + b, b + c, c + a$ sú navzájom rôzne a súčet troch najväčších z nich je 75. Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $a + b + c$.

Riešenie:

Ak vezmeme akékoľvek tri z uvedených čísel, ich súčet bude podľa zadania najviac 75. Platí tak

$$(a + b) + (b + c) + (c + a) \leq 75,$$

$$2a + 2b + 2c \leq 75,$$

$$a + b + c \leq 37.$$

Hodnota 37 je dosiahnuteľná napríklad v prípade $a = 19, b = 17, c = 1$. Šestica čísel je potom 1, 17, 18, 19, 20, 36 a súčet troch najväčších je naozaj $19 + 20 + 36$ čiže 75.

Poznámka:

Riešenie je stručné a asi nie je vidieť, ako sme naň prišli. Opíšeme preto prirodzenejšie úvahy vyplývajúce zo zadania.

Úlohy čísel a, b, c sú zameniteľné, preto môžeme predpokladať, že $a > b > c$. Potom $a + b, a + c > a > b > c$, takže $a + b$ aj $a + c$ medzi tri najväčšie čísla patria, ale b a c nie.

Rozoberme prípady:

- Nech medzi tri najväčšie čísla patrí $b + c$.

Potom

$$(a + b) + (a + c) + (b + c) = 75,$$

$$2a + 2b + 2c = 75,$$

$$a + b + c = 37,5,$$

čo je spor. Tento prípad teda nenastáva.

- Nech medzi tri najväčšie čísla patrí a .

Potom

$$(a + b) + (a + c) + a = 75,$$

$$3a + b + c = 75,$$

$$a + b + c = 75 - 2a,$$

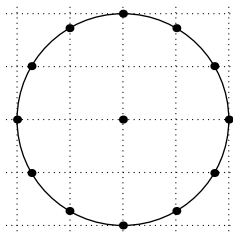
z čoho vyplýva, že hľadáme čo najmenšiu hodnotu a , avšak zároveň a musí byť dostatočne veľké, aby patrilo medzi tri najväčšie čísla, špeciálne je väčšie ako $b + c$. Preto

$$75 = 3a + b + c < 3a + a = 4a,$$

$$19 \leq a.$$

Z predchádzajúceho odseku vieme, že $a = 19$, a potom $b + c = 75 - 3 \cdot 19 = 18$ a vhodne zvolíme b a c .

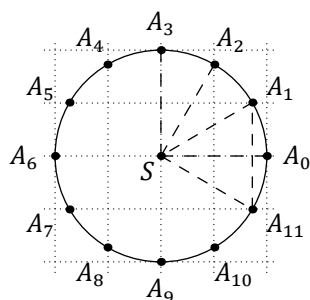
- 3 V štvorčekovej sieti tvorenej štvorcami so stranou 1 je daná kružnica so stredom v mrežovom bode a s polomerom 2, ktorá pretína priamky siete v 12 bodoch. Dokážte, že tieto priesečníky sú vrcholmi pravidelného 12-uholníka.



(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Nech S je stred kružnice a $A_0, \dots, A_{11}$ sú v kladnom smere jej priesečníky s priamkami siete, pričom A_0 leží na kladnej vodorovnej polosi.



Potom body A_{11} a A_1 sú súmerné podľa vodorovnej osi a ležia na rovnobežkách, ktoré sú vzdialené 2, takže $|A_{11}A_1| = 2$. Keďže aj $|SA_{11}| = |SA_1| = 2$, trojuholník $SA_{11}A_1$ je rovnostranný. Preto má uhol $A_{11}SA_1$ veľkosť 60° , takže jeho polovica A_0SA_1 má veľkosť 30° , čo je tretina pravého uhla A_0SA_3 .

Analogicky je tretina tohto uhla aj A_3SA_2 čiže A_2SA_3 , a teda aj A_1SA_2 , takže všetky tieto tri uhly sú zhodné.

Z dôvodu osových súmerností podľa vodorovnej a zvislej osi sú s nimi zhodné všetky ostatné uhly $A_iSA_{(i+1) \bmod 12}$, kde $i \in \{0, \dots, 11\}$. To však znamená, že 12-uholník $A_0 \dots A_{11}$ je pravidelný.

- 4 Nájďte všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$ také, že

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \sqrt{\overline{abcd}}$$

a

$$\overline{cd} - \overline{ab} = 5.$$

(Mária Dományová)

Riešenie:

Nech $x = \overline{ab}$ a $y = \overline{cd}$. Podmienky zo zadania potom môžeme prepísať ako sústavu rovníc pre x a y . Zo zadania platí $\overline{abcd} = 100 \cdot x + y$, takže riešime sústavu rovníc

$$x + y = \sqrt{100x + y},$$

$$y - x = 5.$$

Vyjadrením $y = x + 5$ z druhej rovnice a dosadením do prvej rovnice po umocnení na druhú vznikne kvadratická rovnica

$$2x + 5 = \sqrt{101x + 5},$$

$$(2x + 5)^2 = 101x + 5,$$

$$4x^2 + 20x + 25 = 101x + 5,$$

$$4x^2 - 81x + 20 = 0.$$

Tú môžeme riešiť podľa známeho vzorca alebo si všimneme, že platí

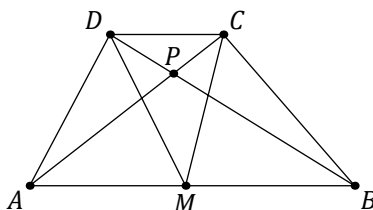
$$4x^2 - 81x + 20 = (4x - 1)(x - 20),$$

z čoho vzhľadom na požadovanú prirodzenosť $x = 20$. Potom $y = 25$ a $\overline{abcd} = 2025$. Číslo 2025 zrejme spĺňa obe rovnosti zo zadania.

- 5 Nech sa uhlopriečky lichobežníka $ABCD$ pretínajú v bode P a ich osi sa pretínajú v bode M ležiacom na jeho základni AB . Dokážte, že P je stredom kružnice vpísanej do trojuholníka CDM .

(Jaroslav Švrček)

Riešenie:



Kedže M leží na osi úsečky AC , trojuholník AMC je rovnoramenný s hlavným vrcholom M . Uhly DCA a CAB sú striedavé, takže

$$|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAM| = |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle PCM| = |\sphericalangle MCP|,$$

a teda CP je os uhla DCM .

Analogicky je DP os uhla CDM , takže P je stred kružnice vpísanej do trojuholníka CDM .

- 6 Na pekáči je 21 buchiet, 10 z nich je plnených lekvárom, zvyšných 11 tvarohom. Môžeme položiť 10 otázok. V každej otázke ukážeme na dve buchty a kuchár nám povie, či majú rovnakú náplň alebo každá inú. Je možné pýtať sa tak, aby sme o aspoň jednej buchti s istotou zistili, čím je plnená?

(Jozef Tkadlec, Felix Schröder)

Riešenie:

Áno, je to možné.

Označme jednu buchtu za *vyvolenú* a zvyšných 20 buchiet rozdelíme do dvojíc, na ktoré sa postupne pýtame.

Buchty, na ktoré sme dostali odpoveď „rôzne“, úplne vyradíme. Tým ubudne rovnako veľa lekvárových buchiet ako tvarohových. Zostalo nám teda k lekvárových a $k + 1$ tvarohových buchiet (celkom $2k + 1$ buchiet).

Uvažujeme už iba k odpovedí „rovnaké“. Medzi $2k$ buchtami, na ktoré sme sa pýtali, je nutne párny počet lekvárových a párny počet tvarohových. Vyvolená buchta je teda toho typu, z ktorého je medzi $2k + 1$ buchtami nepárny počet kusov.

Konkrétne, ak je k (počet lekvárových buchiet) nepárne, je medzi $2k + 1$ buchtami nepárny počet lekvárových, a teda vyvolená buchta je lekvárová. Ak je k párne, je $k + 1$ (počet tvarohových) nepárne, tak je medzi $2k + 1$ buchtami nepárny počet tvarohových, a teda vyvolená buchta je tvarohová.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- recenzent: Stanislav Krajčí
- preklad: Peter Novotný