

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

## Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

---

- 1 Rodina dvoch dospelých s dvoma nepľnoletými deťmi sa vydala na lyžovačku. V lyžiarskom areáli je cena skipasu pre dospelého vyjadrená v celých desiatkach eur, detský skipas je o 60 eur lacnejší. Areál ponúka dve zľavy. Prvá je zľava 10 % na skipas pre každého. Druhá zľava je rodinný lístok, v ktorom sú detské skipasy zľacnené o 20 % a skipasy pre dospelých sú za plnú cenu.

Rodina si najskôr chcela kúpiť všetky štyri lístky v 10 %-nej zľave. Nakoniec však pri kúpe skipasov mama využila 10 %-nú zľavu a otec si spoločne s deťmi kúpil rodinný lístok. Takto ich vyšli skipasy výhodnejšie. Najmenej koľko mohol stáť nezľavnený lístok pre dospelého?

(Tomáš Bárta)

### Riešenie:

Všetky ceny budeme uvádzať v eurách. Cenu skipasu pre dospelú osobu označme  $x$ . Cena skipasov pre celú rodinu bez zliav je  $2x + 2(x - 60)$  čiže  $4x - 120$ . Cena skipasov s uplatnenou 10 %-nou zľavou by teda bola  $0,9 \cdot (4x - 120)$  čiže  $3,6x - 108$ . Cena skipasov v prípade, že mama využije 10 %-nú zľavu a otec s deťmi si kúpi rodinný lístok, je  $0,9x + x + 0,8 \cdot 2(x - 60)$  čiže  $3,5x - 96$ . To je výhodnejšie ako 10 %-ná zľava práve vtedy, keď platí

$$3,5x - 96 < 3,6x - 108,$$

t. j.

$$12 < 0,1x,$$

$$120 < x.$$

Skipas pre dospelú osobu musí stáť viac desiatok eur ako 12, jeho minimálna cena je teda 13 desiatok eur čiže 130 eur.

### Poznámka:

Cena skipasu pre dospelého je celočíselný násobok desiatok eur. Úloha sa teda dá vyriešiť postupným overením prípadov  $x = 70$ ,  $x = 80$  a tak ďalej.

### Pokyny:

1 bod za formuláciu ceny bez akejkoľvek zľavy v závislosti od neznámej  $x$ ; 1 bod za vyjadrenie ceny v 10 %-nej zľave; 1 bod za vyjadrenie ceny v druhom prípade; 2 body za vytvorenie nerovnice a jej správne vyriešenie; 1 bod za zrozumiteľnosť a kvalitu komentára.

Správne riešenie zistené skúšaním ohodnotte podľa systematickosti tipovania a zdôvodnenia, že riešenie je jediné.

---

- 2 Nájdite všetky štvorciferné prirodzené čísla s nasledujúcimi vlastnosťami:

- Na mieste desiatok je cifra 5.
- Po odstránení posledných dvoch cifier vznikne číslo, ktoré je 103-krát menšie.

(Karel Pechouš)

### Riešenie:

Podľa prvej podmienky má číslo tvar  $\overline{ab5c}$ , kde  $a, b, c$  sú neznáme cifry a  $a \neq 0$ . Podľa druhej podmienky platí

$$\overline{ab5c} = 103 \cdot \overline{ab}.$$

Túto rovnosť môžeme ekvivalentne upraviť takto:

$$100 \cdot \overline{ab} + \overline{5c} = 100 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot \overline{ab},$$

$$\overline{5c} = 3 \cdot \overline{ab}.$$

Trojnásobok čísla  $\overline{ab}$  je teda v rozsahu od 50 do 59. Násobky troch v tomto rozsahu sú len 51, 54 a 57. Zodpovedajúce čísla  $\overline{ab}$  sú následne 17, 18 a 19.

Všetky čísla s týmito vlastnosťami sú 1751, 1854 a 1957. Skúškou potvrdíme, že všetky tri riešenia vyhovujú zadaniu.

**Poznámka:**

Druhá podmienka zo zadania môže byť napísaná ako

$$1000a + 100b + 50 + c = 103(10a + b),$$

čo po ekvivalentných úpravách dáva

$$50 + c = 3(10a + b).$$

**Pokyny:**

1 bod za zápis pomocou neznámych; 2 body na úpravu a analýzu možností; 1 bod za každý správny výsledok (dokopy 3 body za všetky tri riešenia).

- 3 Prirodzené číslo nazveme *kockové*, ak jeho zápis obsahuje cifru alebo skupinu po sebe nasledujúcich cifier, ktorá je zápisom tretej mocniny kladného celého čísla. (Napríklad čísla 279 a 729 sú kockové, ale čísla 297 a 792 nie.) Určte počet všetkých trojciferných kockových čísel, ktoré sú tvorené iba párnymi ciframi.

(Monika Dillingerová)

**Riešenie 1:**

Najviac trojciferné čísla, ktoré sú tretie mocniny,

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.$$

V tomto zozname nie je žiadne vyhovujúce kockové číslo. Vyhovujúce čísla musia obsahovať dvojčíslicie 64 alebo číslo 8 (tieto možnosti sa navzájom nevylučujú). Ďalšie povolené cifry sú 0, 2, 4, 6.

Aby sme nič nevynechali alebo nezahrnuli niečo dvakrát, trojciferné čísla budeme hľadať postupne:

- Čísel obsahujúcich cifru 8 na prvom mieste je  $5 \cdot 5$  čiže 25 (na zvyšných miestach môžu byť ľubovoľné párne cifry).
- Zvyšných čísel obsahujúcich cifru 8 na druhom mieste je  $3 \cdot 5$  čiže 15 (na prvom mieste nemôže byť 0 alebo už v predchádzajúcej možnosti započítaná cifra 8).
- Zvyšných čísel obsahujúcich cifru 8 na treťom mieste je  $3 \cdot 4$  čiže 12 (na prvom mieste nemôže byť 0 ani 8, na druhom mieste nemôže byť cifra 8).
- Zvyšné čísla začínajúce sa dvojčíslím 64 sú 4 (na treťom mieste už neuvažujeme cifru 8, ktorá je započítaná vyššie).
- Zvyšné čísla končiace sa dvojčíslím 64 sú 3 (na prvom mieste neuvažujeme ani cifru 0 ani cifru 8).

Vyhovujúcich kockových čísel je  $25 + 15 + 12 + 4 + 3$  čiže 59.

**Riešenie 2:**

Budeme sčítavať počty vyhovujúcich čísel v jednotlivých stovkách (majú rovnakú cifru na pozícií stoviek).

- Ak je na pozícií stoviek cifra 2, tak vyhovuje 5 čísel, ktoré majú na pozícií desiatok cifru 8 (na pozícií jednotiek môžu mať ktorúkoľvek z cifier 0, 2, 4, 6, 8), 5 čísel, ktoré majú na pozícií jednotiek cifru 8 a číslo 264. Spolu je to 10 čísel, lebo v prvých dvoch skupinách sme číslo 288 zarátali dvakrát.
- Situácia s cifrou 4 na pozícií stoviek je analogická. Pribudne ďalších 10 čísel s požadovanými vlastnosťami.
- Ak je na pozícií stoviek cifra 6, tak k desiatim číslam pribudnú štyri čísla, ktoré sme ešte nezaráтали (s dvojčíslím 64 na začiatku), a to 640, 642, 644 a 646 (648 nie, lebo je už zarátané pri cifre 8).
- Ak je na pozícií stoviek cifra 8, tak na zvyšných dvoch pozíciách môžu byť ktorékoľvek z uvažovaných cifier. Čísel, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, bude  $5 \cdot 5$  čiže 25. Žiadne z nich nebolo zarátané v predchádzajúcich skupinách.

Spolu preto máme  $2 \cdot 10 + 14 + 25$  čiže 59 čísel.

**Pokyny:**

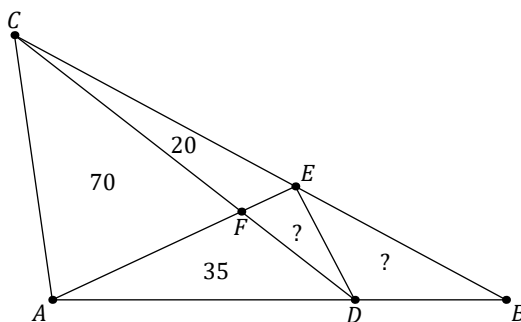
1 bod za tretie mocniny menšie ako 1000 a záver, že iba 64 a 8 môžeme používať; 3 body za analýzu počtu čísel podľa pozície cifry 8; 2 body za analýzu možností pre dvojčíslicie 64 a celkový výsledok.

Úplný výpis možností s komentárom ohodnotíte plným počtom bodov. Pri vypisovaní možností za každé zabudnuté číslo alebo číslo navyše strhnite 1 bod.

</

**Riešenie 1:**

Situáciu, ktorú popisuje zadanie úlohy, môžeme znázorniť takto (vyznačené obsahy trojuholníkov sú v  $\text{cm}^2$ ):



Na obrázku existuje veľa dvojíc trojuholníkov, ktoré majú spoločný aspoň jeden vrchol a výšku (napríklad trojuholníky  $CFE$  a  $FDE$  so spoločným vrcholom  $E$  a výškou na stranu  $CD$ , resp.  $FD$  prechádzajúcou cez bod  $E$ ). Vieme, že pre každú takúto dvojicu trojuholníkov je pomer ich obsahov rovnaký ako pomer dĺžok strán ležiacich oproti spoločnému vrcholu. Využime tento poznatok opakovane, najskôr pre dvojicu trojuholníkov  $ADF$  a  $AFC$ . Pre úsečku  $CD$  a jej rozdelenie bodom  $F$  platí

$$S(ADF) : S(AFC) = |FD| : |CF|.$$

Podobne pre dvojicu trojuholníkov  $DEF$  a  $ECF$  platí

$$S(DEF) : S(ECF) = |FD| : |CF|.$$

Porovnaním týchto dvoch rovností a po úprave vyjadríme neznámy obsah:

$$S(DEF) : S(ECF) = S(ADF) : S(AFC),$$

$$S(DEF) : 20 \text{ cm}^2 = 35 \text{ cm}^2 : 70 \text{ cm}^2,$$

$$S(DEF) = 20 \text{ cm}^2 \cdot 35 : 70 = 10 \text{ cm}^2.$$

Pre úsečku  $BC$  a jej rozdelenie bodom  $E$  platí

$$S(BED) : S(DEC) = |BE| : |EC| = S(ABE) : S(AEC),$$

takže

$$S(BED) : S(DEC) = S(ABE) : S(AEC),$$

$$S(BED) : (S(DEF) + S(ECF)) = (S(DBE) + S(DEF) + S(ADF)) : (S(AFC) + S(CEF)),$$

$$S(BED) : (20 \text{ cm}^2 + 10 \text{ cm}^2) = (S(BED) + 10 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2) : (70 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2),$$

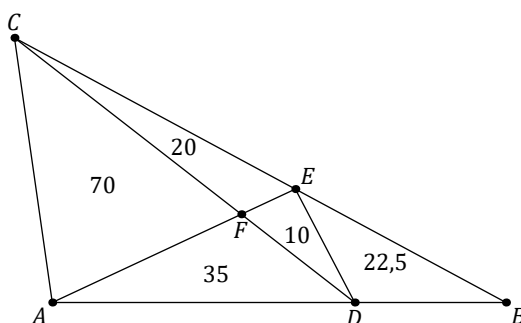
$$S(BED) : 30 \text{ cm}^2 = (S(BED) + 45 \text{ cm}^2) : 90 \text{ cm}^2,$$

$$90 \cdot S(BED) = 30 (S(BED) + 45 \text{ cm}^2),$$

$$90 \cdot S(BED) = 30 \cdot S(BED) + 30 \cdot 45 \text{ cm}^2,$$

$$60 \cdot S(BED) = 1350 \text{ cm}^2,$$

$$S(BED) = 1350 \text{ cm}^2 : 60 = 22,5 \text{ cm}^2.$$



Obsahy trojuholníkov  $DEF$  a  $BED$  sú teda  $10 \text{ cm}^2$ , resp.  $22,5 \text{ cm}^2$ .

**Poznámka:**

Opísané vlastnosti sa dajú využiť rôznymi spôsobmi, napr. zdôvodnenie v druhej časti problému súvisiaceho s delením úsečky  $AB$  dáva

$$S(BED) : S(EAD) = |DB| : |AD| = S(CDB) : S(CAD),$$

čo po dosadení známych obsahov a úprave vedie k rovnakému výsledku ako vyššie:

$$S(BED) : S(EAD) = S(CDB) : S(CAD),$$

$$S(BED) : (S(DEF) + S(ADF)) = (S(BED) + S(DEF) + S(ECF)) : (S(AFC) + S(ADF)),$$

$$S(BED) : (10 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2) = (S(BED) + 10 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2) : (70 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2),$$

$$S(BED) : 45 \text{ cm}^2 = (S(BED) + 30 \text{ cm}^2) : 105 \text{ cm}^2,$$

$$105 \cdot S(BED) = 45 (S(BED) + 30 \text{ cm}^2),$$

$$105 \cdot S(BED) = 45 \cdot S(BED) + 45 \cdot 30 \text{ cm}^2,$$

$$60 \cdot S(BED) = 1350 \text{ cm}^2,$$

$$S(BED) = 1350 \text{ cm}^2 : 60 = 22,5 \text{ cm}^2.$$

**Pokyny:**

1 bod za sformulovanie opakovane používaného vzťahu o pomeroch obsahov trojuholníkov (so spoločnou výškou) vzhľadom na pomer základní; 2 body za výpočet a zdôvodnenie výpočtu obsahu trojuholníka  $DEF$ ; 2 body za výpočet a zdôvodnenie výpočtu obsahu trojuholníka  $BED$ ; 1 bod za prehľadnosť úprav a kvalitu komentára.

---

Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným.

---

Opäť upozorňujeme na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO <https://skmo.sk>. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu [skmo@skmo.sk](mailto:skmo@skmo.sk) v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete.

Prosíme, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve 3 žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6.–8. miesto, prípadne skrátené len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

- 
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
  - autorka z SK MO: Monika Dillingerová
  - recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančígová, Stanislav Krajčí
  - preklad: Erika Novotná