

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh školského kola kategórie C

- 1 Virálne video získava počas každého 24-hodinového intervalu rovnaký počet nových pozretí. Na webe sa počet pozretí ukazuje zaokrúhlený nadol na celé milióny. Predvčerom napoludnie web ukazoval 1 milión pozretí, včera napoludnie 2 milióny, dnes napoludnie 4 milióny. Koľko miliónov to môže byť zajtra napoludnie? (Nájdite všetky možnosti.)

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Skutočné množstvo v miliónoch pozretí dnes na poludnie označme a . Vieme, že $4 \leq a \leq 4,999999$. Prírastok počtu pozretí od jedného poludnia k nasledujúcemu poludniu je zakaždým rovnaký, označme ho b .

Napríklad v prípade $a = 4,25$ a $b = 1,6$ je situácia takáto:

čas	milióny pozretí	ukazovateľ na webe
predvčerom na poludnie	1,05	1
včera na poludnie	2,65	2
dnes na poludnie	4,25	4
zajtra na poludnie	5,85	5

Zmena počítadla z 2 miliónov na 4 milióny znamená, že dnes má video aspoň 4 milióny pozretí a včera ich malo najviac 2,999999 milióna, teda $b \geq 4 - 2,999999 > 1$. Zajtra na poludnie tak bude web ukazovať aspoň 5 miliónov, pretože $a + b > 4 + 1 = 5$.

Zmena z 1 milióna na 2 milióny znamená, že včera malo video najviac 2,999999 milióna pozretí a predvčerom ich malo aspoň 1 milión, teda $b \leq 2,999999 - 1 < 2$. Zajtra na poludnie tak bude web ukazovať nanajvýš 6 miliónov, pretože $a + b < 4,999999 + 2 = 6,999999$.

Už sme ukázali, že hodnota 5 sa na webe naozaj môže objaviť. Hodnota 6 sa ukáže napríklad v prípade $a = 4,85$ a $b = 1,9$:

čas	milióny pozretí	ukazovateľ na webe
predvčerom na poludnie	1,05	1
včera na poludnie	2,95	2
dnes na poludnie	4,85	4
zajtra na poludnie	6,75	6

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 [1 bod] Správna odpoveď (aj bez zdôvodnenia), že riešením budú obe čísla 5 aj 6.
- A2 [1 bod] Postupnosť 4 čísel nezaokrúhlených počtov pozretí (napr. (1,05, 2,65, 4,25, 5,85)) dokazujúca, že na webe môže byť číslo 5. Postupnosť je možné v princípe nahradiť napríklad vzťahom $(a, b) = (4,25, 1,6)$ s komentárom, že potom sa každé z čísel zaokrúhli „správne“.
- A3 [1 bod] Postupnosť 4 čísel nezaokrúhlených počtov pozretí (napr. (1,05, 2,95, 4,85, 6,75)) dokazujúca, že na webe môže byť číslo 6. Postupnosť je možné v princípe nahradiť napríklad dvojicou $(a, b) = (4,85, 1,9)$ s komentárom, že potom sa každé z čísel zaokrúhli „správne“.
- B1 [1 bod] Úlohu sa podarí aspoň čiastočne previesť do matematického jazyka a kdekoľvek sa objaví obojstranný odhad. Napríklad sa zavedú premenné a, b ako vo vzorovom riešení (alebo aspoň jedna z nich) a objaví sa obojstranný odhad typu $4 < a < 5$ (ten by správne mal byť $4 \leq a < 5$, ale drobné nepresnosti tolerujte).
- B2 [1 bod] Zdôvodnenie, že $a + b \geq 5$ (stačí úvaha bez použitia premenných).
- B3 [1 bod] Zdôvodnenie, že $a + b < 7$ (stačí úvaha bez použitia premenných).

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte súčet počtov bodov za A1, za A2, za A3, za B1, za B2, za B3.

Pritom ak sa objavia v riešení oba kroky A2 a A3, automaticky dajte aj bod za A1. Podobne ak sa objavia v riešení oba kroky B2 a B3, automaticky dajte aj bod za B1.

V krokoch B1, B2, B3 tolerujte, keď riešenie pracuje s nerovnosťami $b \geq 1$, $b > 1$ či $b \geq 1,000001$ (posledné vyplýva z faktu, že počet pozretí je celé číslo a riešenia môžu tento fakt používať aj bez komentára). Podobne pristupujte k nerovnostiam $b \leq 2$, $b < 2$, $b \leq 1,999999$.

Súčasťou úplného riešenia je nielen ukázať, že iné hodnoty ako 5 alebo 6 sa objaviť nemôžu, ale aj zdôvodniť, že obe tieto hodnoty sa objaviť môžu (typicky konštrukciou postupností, ako je uvedené v krokoch A2, A3). Ak v inak úplnom riešení chýbajú presne kroky A2, A3, dajte 5 bodov.

2 Rozhodnite, či sa dá obdĺžnik

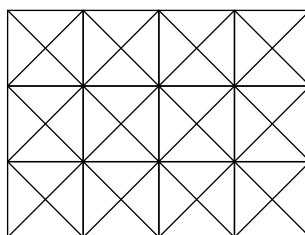
- a) $3\sqrt{2} \times 4$,
- b) $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

bezo zvyšku rozrezať na pravouhlé rovnoramenné trojuholníky s odvesnami dĺžky 1.

(Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

Riešenie:

- a) Obsah obdĺžnika $3\sqrt{2} \times 4$ je $12\sqrt{2}$, zatiaľ čo obsah jedného trojuholníka je $\frac{1}{2}$. Museli by sme obdĺžnik rozrezať na $12\sqrt{2} : \frac{1}{2} = 24\sqrt{2}$ zhodných trojuholníkov, čo však nie je prirodzené číslo, takže rezanie bezo zvyšku nemožno vykonať.
- b) Obdĺžnik je možné rozrezať napríklad tak, ako je nakreslené na obrázku:



Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- C1 [1 bod] Správna odpoveď (aj bez zdôvodnenia alebo s úplne zlým zdôvodnením), že prípad a) nepôjde, zatiaľ čo prípad b) pôjde.
- B1 [3 body] Obrázok, ktorý dokazuje, že obdĺžnik $3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$ je možné rozrezať. Uznávajú aj slovný popis, podľa ktorého je možné obrázok jednoznačne nakresliť. Pokiaľ popis nie je jednoznačný, ale možno odhadnúť, ako bol zrejme myslený, dajte časť bodov.
- A1 [3 body] Kompletne zdôvodnenie, že obdĺžnik $3\sqrt{2} \times 4$ nie je možné rozrezať (typicky pomocou argumentu s obsahom).
- A2 [2 body] Zdôvodnenie, že obdĺžnik $3\sqrt{2} \times 4$ rozrezať nemožno, v ktorom sa rozoberajú prípady, ako ktorý trojuholník umiestniť, pričom je vynechaný iba jeden prípad, ktorý je veľmi ľahké dokončiť a tento vynechaný prípad je podobný už rozobranému prípadu.
- A3 [1 bod] Snaha zdôvodniť, že obdĺžnik $3\sqrt{2} \times 4$ rozrezať nemožno, pričom sa rozoberajú prípady, ako ktorý trojuholník umiestniť, je vynechaný viac ako jeden prípad, ale žiadny z vynechaných prípadov sa ďalej nevetví na podprípady a každý vynechaný prípad možno vylúčiť myšlienkou, ktorá sa už objavila v rozobraných prípadoch.
- A4 [0 bodov] Snaha zdôvodniť, že obdĺžnik $3\sqrt{2} \times 4$ rozrezať nemožno, pričom sa rozoberajú prípady, ako ktorý trojuholník umiestniť, a niektoré prípady sú vynechané. Len čo sa niektorý z vynechaných prípadov ďalej vetví na podprípady alebo nie je jasné, že ho možno vylúčiť použitím myšlienky, ktorá sa už objavila, neudeľujte za túto snahu žiadne body.

Celkovo za neúplné riešenia dajte maximum z počtu bodov za C1 a zo súčtu počtu bodov za B1 a maxima z počtov bodov za A1, za A2 a za A3.

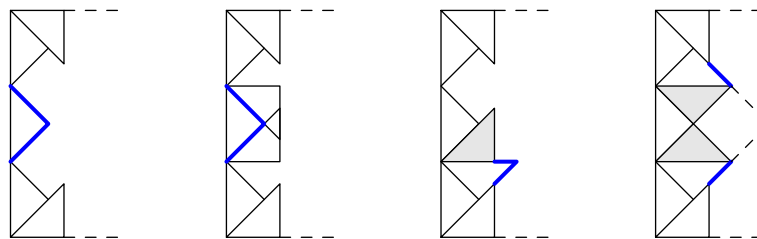
Argument s obsahom použitý v časti a) považujeme za prístupný pre každého. Napriek tomu sa zrejme objavajú pokusy zdôvodniť časť a) iným spôsobom a bude dosť náročné tieto pokusy ohodnotiť. Domnievame sa, že veľká väčšina z nich skončí v kategórii A4, pretože rozboru tohto typu majú tendenciu sa vetviť tak rýchlo, že býva veľmi ťažké na žiadny prípad nezabudnúť.

Pre lepšiu predstavu, ako môžu vyzeráť snahy vyriešiť časť a) rozborom, uvedieme jedno také riešenie, zámerne spísané „jazykom študentov“ a na niektorých miestach ho doplníme našimi poznámkami písanými sivou farbou, ktoré azda pomôžu porozumieť, ako to asi bolo myslené.

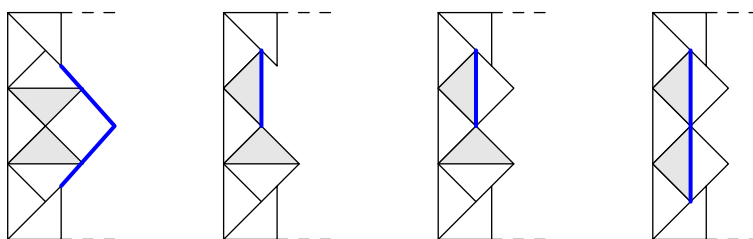
- a) Pravouhlý trojuholník má strany 1, 1, $\sqrt{2}$ Pytagorova veta..

Je jasné, že pri strane dĺžky $3\sqrt{2}$ musia byť 3 prepony Argument by mohol byť presnejší, ale naozaj je dostatočne zrejme, že rovnosť $m \cdot 1 + n \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ pre prirodzené m a n nastane iba v prípade $m = 0, n = 3$, aj keď

formálne by sme mali povedať, že v prípade $n \neq 3$ môžeme napísať $\sqrt{2} = \frac{m}{3-n}$, a tým dostať spor s iracionalnosťou $\sqrt{2}$. a pri stranách dĺžky 4 musia byť 4 odvesny. Na 1. obrázku je strana $3\sqrt{2}$ pokrytá preponami a na stranách dĺžky 4 je nakreslený zakaždým len jeden trojuholník (ktorého umiestnenie je jednoznačne určené), pretože ostatné trojuholníky je možné umiestniť viacerými spôsobmi. Rozoberieme možnosti, ako pokryť zvýraznené úsečky dĺžky 1.



- Obe sú pokryté preponami. Potom obe prepony budú prečnievať a ich trojuholníky sa prekrývajú, pozri 2. obrázok. „Prečnievanie“ nie je matematický pojem, ale myšlienka je popísaná zrozumiteľne.
- Jedna je pokrytá odvesnou, jedna preponou. Bez ujmy na všeobecnosti To si naozaj môžeme dovoliť vďaka symetrii obdĺžnika podľa vodorovnej osi. je preponou pokrytá spodná Nepresný termín, ale z obrázka je zrejmé, ktorá úsečka sa myslí. Nový trojuholník (zvýraznený na 3. obrázku) určuje umiestnenie trojuholníka pod ním a jeho zvýraznený roh nemožno pokryť bez prečnievania Obe zvýraznené úsečky sú kratšie ako 1 a každá z nich musí byť pokrytá stranou dĺžky aspoň 1. Napravo od zvýrazneného rohu teda dôjde k prekrytiu trojuholníkov, čo znamená, že tadiaľto cesta nevedie..
- Obe sú pokryté odvesnami. Uvažujme ďalej tieto dva trojuholníky (na obrázkoch zvýraznené), ktorých odvesny pokrývajú zvýraznené úsečky z 1. obrázku. Znovu rozlíšime rôzne prípady:
 - Oba trojuholníky majú vodorovné prepony. Potom je určené umiestnenie trojuholníkov nad nimi a pod nimi ako na 4. obrázku. Dve zvýraznené úsečky je potrebné pretiahnuť Ich dĺžky sú menšie ako 1, takže či už ich pokryjeme preponou dĺžky $\sqrt{2}$, alebo odvesnou dĺžky 1, budú „pretiahnuté“. a následne vyplniť štvorec – jeho pravý roh bude mať problém. Zvýraznené úsečky na 1. obrázku majú dĺžku $3 - \sqrt{2}$, čo sa nedá pokryť presne, takže obe budú prečnievať a dôjde k prekrytiu trojuholníkov Takže tadiaľto cesta nevedie..
 - Jeden trojuholník (bez ujmy na všeobecnosti spodný) má vodorovnú preponu, jeden zvislú. Potom je určené umiestnenie trojuholníka pod tým, ktorý má vodorovnú preponu, pozri 2. obrázok. Zvýraznenú úsečku dĺžky $\sqrt{2}$ možno pokryť jedine preponou Keby sme ju „pokryli“ odvesnou dĺžky 1, zostane nám úsečka dĺžky $\sqrt{2} - 1$, ktorú bez prekryvania nepokryjeme., takže vznikne 3. obrázok a dostaneme sa do situácie zo 4. obrázku 1. štvorice. O nej už vieme, že vedie k sporu..



- Oba trojuholníky majú zvislú preponu, pozri 4. obrázok. Zvýraznenú úsečku dĺžky $2\sqrt{2}$ možno pokryť jedine dvoma preponami, takže musíme dvoma trojuholníkmi dokončiť štvorce, ako to už je na 4. obrázku. nakreslené, a sme znovu v situácii zo 4. obrázku 1. štvorice obrázkov. O nej už vieme, že vedie k sporu..

Formulácie v tomto riešení nie sú príliš exaktné (čo by bolo veľmi náročné), ale sú v princípe správne, myšlienky je možné sledovať a mohli by sme tak udeliť 3 body za krok A1. Ak by riešenie zabudlo napríklad druhý podprípád tretieho prípadu), mohli by sme udeliť 2 body za krok A2. Keby riešenie zabudlo celý tretí prípad, udelili by sme už 0 bodov (A4), pretože prechod od 4. obrázku 1. štvorice k 1. obrázku 2. štvorice vyžaduje myšlienku „pretiahnutia“ zvýraznených úsečiek a „vyskladania“ ešte jedného štvorca, čo v predchádzajúcich prvých dvoch prípadoch nebolo potrebné.

- 3 Predpokladajme, že šesť celých čísel $a, b, c, a + b, b + c, c + a$ je navzájom rôznych, aspoň jedno je nepárne, aspoň jedno párne a súčet všetkých nepárnych čísel je rovný súčtu všetkých párnych čísel. Nájdite všetky možné hodnoty výrazu $a + b + c$.

Riešenie 1:

Rozlíšime prípady podľa počtu párných čísel medzi číslami a, b, c .

- Všetky sú párne. Potom sú párne aj čísla $a + b, b + c, c + a$, čo zadanie vylučuje.
- Práve dve sú párne. Potom z čísel $a + b, b + c, c + a$ je iba jedno párne, takže celkom máme 3 párne čísla a 3 nepárne čísla. Súčet (troch) párných čísel je číslo párne, zatiaľ čo súčet troch nepárných čísel je číslo nepárne, takže tento prípad nastať nemôže.
- Práve jedno je párne. Bez ujmy na všeobecnosti je a párne. Potom z čísel $a + b, b + c, c + a$ je párne iba $b + c$. Keďže súčet párných čísel je rovný súčtu nepárných, platí $a + (b + c) = b + c + (a + b) + (c + a)$ a po úprave $a + b + c = 0$. Tento prípad môže naozaj nastať: Ak $a = 1, b = 2, c = -3$, tak $a + b = 3, b + c = -1, c + a = -2$ a súčet párných čísel je 0, rovnako ako súčet nepárných čísel.
- Žiadne nie je párne. Máme tak tri nepárne čísla a, b, c a tri párne čísla $a + b, b + c, c + a$. Rovnako ako vyššie súčet (troch) párných čísel je párny, zatiaľ čo súčet troch nepárných čísel je nepárny, takže tento prípad nastať nemôže.

Súčet $a + b + c$ nadobúda jedine hodnotu 0 a pre túto hodnotu naozaj existujú vhodné čísla a, b, c spĺňajúce zadanie úlohy.

Poznámka:

Ukázali sme, že prípad d) nastať nemôže. Namiesto toho by sme mohli v prípade d) napísať rovnosť $a + b + c = (a + b) + (b + c) + (c + a)$, čo dá znovu $a + b + c = 0$, a nezaoberať sa tým, či tento prípad môže alebo nemôže nastať.

Riešenie 2:

Súčet všetkých čísel je $3(a + b + c)$. Ak označíme P súčet všetkých párných čísel a N súčet všetkých nepárných čísel, tak zrejme $P + N = 3(a + b + c)$. Podľa zadania $P = N$, takže $2P = 2N = 3(a + b + c)$, čo znamená, že $a + b + c$ je párne. Medzi číslami a, b, c je tak buď práve jedno párne číslo, alebo sú všetky párne.

- Ak sú všetky párne, ide o prvý prípad z prvého riešenia.
- Ak je práve jedno číslo párne, ide o tretí prípad z prvého riešenia.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 [1 bod] Správna odpoveď (aj bez zdôvodnenia), že hodnota súčtu $a + b + c$ je jedine 0.
- A2 [1 bod] Rozlíšenie prípadov podľa počtu párných čísel (či počtu nepárných čísel). Často asi pôjde o ich počet medzi číslami a, b, c , ale môže to byť aj medzi číslami $a + b, b + c, c + a$ či medzi všetkými 6 číslami, možno veľmi výnimočne pôjde aj o inú množinu čísel.
- A3 [1 bod] Zistenie, že za nejakých okolností musí platiť $a + b + c = 0$. Napríklad v prvom riešení platilo $a + b + c = 0$ v prípade, že jedno z čísel a, b, c bolo párne.
- B1 [1 bod] Príklad trojice čísel (a, b, c) , ktorá spĺňa všetky podmienky zadania. Podmienky nie je nutné overovať explicitne, riešiteľom môžu pripadať zrejme.
- C1 [1 bod] Vylúčenie nejakého prípadu použitím podmienky zo zadania, že medzi šiestimi číslami je aspoň jedno nepárne. V prvom riešení to bolo vylúčenie prípadu a).
- C2 [2 body] Vylúčenie nejakého prípadu (alebo viacerých prípadov) použitím podmienky zo zadania, že súčet všetkých nepárných čísel je rovný súčtu všetkých párných čísel. V prvom riešení to bolo vylúčenie prípadov b) a d), pretože súčet (troch) párných čísel je párny, zatiaľ čo súčet troch nepárných čísel je nepárny. V druhom riešení sme podmienku zo zadania napísali ako $P = N$ a získali z nej, že $a + b + c$ je párne, čím sme vylúčili prípad, že $a + b + c$ je nepárne. Je to rovnaké ako vylúčiť prípad, v ktorom žiadne z čísel a, b, c nie je párne, a prípad, v ktorom dve z čísel a, b, c sú párne (to znovu zodpovedá prípadom b) a d) z prvého riešenia).

Celkovo potom za neúplné riešenia dajte súčet počtov bodov za B1, za C1, za C2 a za maximum z počtu bodov za A1 a za súčet bodov za A2 a za A3.

Ak chýba rozobratie nejakého prípadu, dajte najviac 5 bodov.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - recenzenti: Stanislav Krajčí, Peter Novotný
 - preklad: Peter Novotný