

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh školského kola kategórie B

- 1 Rozhodnite, či je možné označiť hrany kocky číslami 1, 2, ..., 12 tak, aby každé číslo bolo použité a aby pre každý vrchol bol súčet čísel hrán, ktoré z neho vychádzajú, rovnaký.

(Mária Dományová)

Riešenie 1:

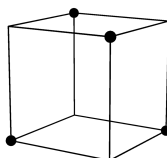
Predpokladajme, že je to možné, a označme S súčet čísel hrán pri každom z vrcholov. Keďže každá hrana spája dva vrcholy, je jej číslo započítané do súčtov pri dvoch vrcholoch, a dvojnásobok súčtu pri všetkých hranách je tak rovný $8S$. Teda

$$8S = 2(1 + \dots + 12) = 156,$$
$$S = \frac{156}{8} = 19,5,$$

čo je spor, lebo číslo S ako súčet niekoľkých prirodzených čísel musí byť prirodzené. Hrany kocky teda nie je možné označiť požadovaným spôsobom.

Riešenie 2:

Nech S je súčet čísel hrán pri každom z vrcholov. Každá hrana kocky vychádza práve z jedného zo 4 vrcholov vyznačených na obrázku.



$$4S = 1 + \dots + 12 = 78,$$
$$S = \frac{78}{4} = 19,5,$$

čo je spor s prirodzenosťou S .

Poznámka:

Uvedené riešenia sú formulované ako dôkaz sporom na základe stručného argumentu, ktorý sa môže zdať ťažké vymyslieť. Preto ukážeme, ako k nemu možno dospieť.

Najskôr sa pokúšame hranám čísla nejako priradzovať a skúmame, aké súčty pri vrcholoch vychádzajú. Dajme tomu, že jedným takým pokusom bolo priradiť hranám okolo jedného vrcholu čísla 5, 7 a 10. To dáva súčet 22, takže okolo oboch krajných vrcholov hrany s číslom 1 musia byť (disjunktné) dvojice čísel so súčtom 21. Takú dvojicu máme však už len jednu (12 a 9), takže tieto čísla boli zrejme ako ohodnotenia trojice hrán vychádzajúcich z rovnakého vrcholu kocky príliš veľké. Všeobecnejšie, keďže máme presne dané, ktoré čísla máme k dispozícii, tak ak zvolíme okolo jedného vrcholu príliš veľké čísla, na iné vrcholy ostanú čísla príliš malé na to, aby mohli súčty pri vrcholoch vyjsť všetky rovnako. Teda samotná hodnota súčtu S nemôže byť príliš vysoká ani príliš nízka. Na S sa musia sčítat nejaké tri čísla z množiny $\{1, \dots, 12\}$, teda

$$1 + 2 + 3 = 6 \leq S \leq 10 + 11 + 12 = 33.$$

Vidíme, že obmedzenie získané rozborom situácie len pri jedinom vrchole je veľmi slabé. Pozrime sa preto na dva protiahle vrcholy kocky. Tie nemajú žiadne spoločné hrany a čísla pri nich sa neopakujú, takže sčítaním čísel pri týchto šiestich hranách dostaneme nerovnosti

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \leq 2S \leq 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57,$$

takže

$$10,5 \leq S \leq 28,5,$$

čo už je tesnejší odhad. Je zrejmé, že ideálne by bolo do odhadu zapojiť všetkých dvanásť čísel (potom by dve nerovnosti prešli na jednu rovnosť). Musíme si ale rozmyslieť, na ktoré vrcholy sa pozrieť, ku ktorému vrcholu započítat číslo ktorej hrany a podobne, a takéto úvahy sú jadrom vyššie uvedených riešení.

Poznámka:

Ďalšou možnosťou je zostaviť 8 rovníc (pre každý vrchol jednu) s 13 neznámymi (čísla pri hranách a súčet S). typu $a + b + c = S$. Sčítaním niekoľkých z nich a pomocou znalosti toho, ktoré čísla sa pri hranách vyskytujú (vieme, že sú to čísla 1 až 12, každé práve raz, nepoznáme však ich rozmiestnenie) je tiež možné dôjsť k výpočtu hodnoty S .

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnotte kroky nasledovne:

- A1 Tvrdenie, že to nie je možné: 1 bod
- A2 Označenie spoločného súčtu pri vrcholoch (S) alebo skúmanie tejto hodnoty: 1 bod
- A3 Odvodenie nejakého platného odhadu na S (napr. ako v poznámke vyššie) alebo neplatné, ale „rozumné“ rovnice pre S (napr. $1 + \dots + 12 = 8S$): 1 bod
- A4 Zostavenie správnej rovnice pre S : 3 body
- A5 Argumentácia neprirodzenosťou S a formulácia záveru: 1 bod

Celkovo za neúplné riešenie dajte súčet bodov za A1, za A2 a za maximum z počtov bodov za A3, za A4 a za A5.

- 2 Máme pravítko bez mierky, ktoré umožňuje iba viesť priamku ľubovoľnými dvoma bodmi, a kružidlo, ktorým sa dajú rysovať iba kružnice s ľubovoľným celočíselným polomerom. Popíšte a zdôvodnite konštrukciu rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky $\sqrt{7}$ s týmito nástrojmi.

(Tomáš Bárta)

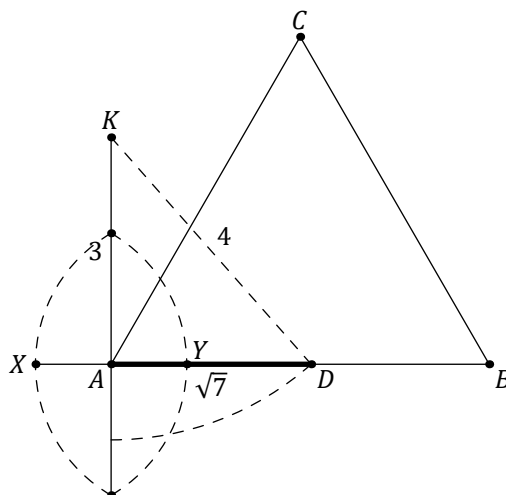
Riešenie 1:

Základnou myšlienkou je rozdeliť úlohu na dve časti: zostrojiť úsečku dĺžky $\sqrt{7}$ a s pomocou tejto schopnosti „orezať“ väčší rovnostranný trojuholník. Uvedomme si, že štandardný postup konštrukcie rovnostranného trojuholníka s danou dĺžkou strany (ktorú už máme zostrojenú ako úsečku) naše obmedzené kružidlo dovoľuje iba pre nenulové prirodzené dĺžky.

Pre prvú časť využijeme Pytagorovu vetu v tvare $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, kde za c (dĺžku prepony) a b (dĺžku jednej odvesny) zvolíme vhodné nenulové prirodzené čísla. Keďže $7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$, ponúka sa voľba $c = 4$ a $b = 3$.

Zvyšok riešenia obsahuje celý postup konštrukcie (pozri obrázok):

- Štandardným postupom zostrojíme rovnostranný trojuholník ABC s nejakou prirodzenou dĺžkou strany.
- Bodom A vedieme kolmicu p na priamku AB . To možno vykonať aj s obmedzeným kružidlom (a pravítkom) takto: na priamke AB nájdeme pomocou kružidla dva rôzne body X a Y tak, aby $|AX| = |AY| = r$ (bod A bude teda stredom úsečky XY) pre nejaké nenulové prirodzené číslo r . Následne zostrojíme priesečníky kružníc s polomerom $2r$ so stredmi v X a Y . Ich spojnicou je hľadaná kolmica na priamku AB prechádzajúca bodom A .
- Pomocou kružnice so stredom v A a polomerom 3 nájdeme na priamke p bod K tak, že $|AK| = 3$ (máme dva priesečníky, z nasledujúceho postupu je vidieť, že nezáleží na tom, s ktorým budeme pracovať).
- Zostrojíme kružnicu so stredom v bode K a polomerom 4. Táto kružnica pretne polpriamku AB v práve jednom bode, ktorý označíme D .



5. Trojuholník AKD je pravouhlý s preponou KD dĺžky 4 a odvesnou AK dĺžky 3, takže podľa Pytagorovej vety platí

$$|AD| = \sqrt{|KD|^2 - |AK|^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

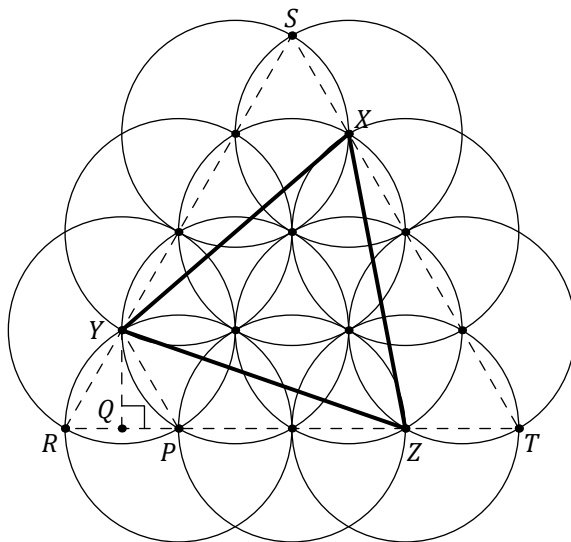
6. Analogickým postupom nájdeme na polpriamke AC bod E taký, že $|AE| = \sqrt{7}$.
 7. Narysovaním priamky DE potom získame trojuholník ADE taký, že $|AD| = |AE| = \sqrt{7}$ a $|\sphericalangle DAE| = 60^\circ$, takže je rovnostranný.

Riešenie 2:

Alternatívnou možnosťou získania úsečky s dĺžkou $\sqrt{7}$ je použitie jednej z Euklidových viet, kde sa tiež vyskytujú druhé mocniny dĺžok. Napríklad podľa Euklidovej vety o výške v trojuholníku PQR s pätou S výšky z vrcholu P platí, že $|PS|^2 = |QS| \cdot |RS|$, takže voľba $|QS| = 1$ a $|RS| = 7$ dáva správnu dĺžku výšky a súčasne kružnicu nad priemerom QR môžeme zostrojiť naším obmedzeným kružidlom (dĺžka jej polomeru je $\frac{7+1}{2}$ čiže 4). Na získanie požadovanej dĺžky na polpriamke AB (obsahujúcej stranu už zostrojeného rovnostranného trojuholníka ABC) budeme dĺžky 1 a 7 nanášať na kolmicu na polpriamku AB vedenú bodom A , ktorú zostrojíme rovnako ako v predošlom riešení.

Riešenie 3:

Ukážeme, že ako vrcholy hľadaného trojuholníka možno použiť vhodné body jednotkovej trojuholníkovej siete. Zostrojíme kružnicu s polomerom 1, na nej zvolíme ľubovoľný bod, ten vezmeme ako stred ďalšej jednotkovej kružnice. V ďalšom kroku vezmeme ako stred niektorý zo získaných priesečníkov a postup opakujeme, kým nezískame všetky označené body z obrázka.



Potom $|YZ| = \sqrt{7}$, čo možno overiť napr. pomocou kosínusovej vety v trojuholníku YPZ :

$$\begin{aligned} |YZ| &= \sqrt{|PY|^2 + |PZ|^2 - 2 \cdot |PY| \cdot |PZ| \cdot \cos |\sphericalangle ZPY|} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{1 + 4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{5 - (-2)} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

alebo pomocou Pytagorovej vety použitej v trojuholníkoch PQY a ZQY (Q je pätá kolmice z bodu Y na priamku PZ , t. j. stred prislúchajúcej jednotkovej úsečky RP):

$$\begin{aligned} |YZ| &= \sqrt{|QZ|^2 + |QY|^2} = \sqrt{|QZ|^2 + |PY|^2 - |PQ|^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25 + 4 - 1}{4}} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}. \end{aligned}$$

To, že aj úsečky XY a XZ majú rovnakú dĺžku, vyplýva zo symetrie celého obrázka, presnejšie zo zhodnosti trojuholníkov RZY , TXZ a SYX .

Pokyny:

V neúplných riešeniach postupujúcich podľa prvého alebo druhého vzorového riešenia ohodnotte kroky nasledovne:

- A1 Nájdenie vhodných dĺžok pre Pytagorovu vetu alebo ekvivalent: 2 body
- A2 Popis konštrukcie kolmice na priamku jej daným bodom: 1 bod
- A3 Popis zvyšku konštrukcie vhodného pravouhlého trojuholníka: 1 bod
- A4 Použitie rovnostranného trojuholníka s prirodzenou dĺžkou strany: 1 bod
- A5 Dokončenie konštrukcie požadovaného rovnostranného trojuholníka a prislúchajúce zdôvodnenie: 1 bod

Celkovo za takéto neúplné riešenie udeľte súčet počtov bodov za A1, za A2, za A3, za A4 a za A5

Kroky riešení postupujúcich podľa tretieho vzorového riešenia (s trojuholníkovou sieťou) ohodnotte takto:

- B1 Popis konštrukcie vhodnej časti jednotkovej trojuholníkovej siete: 1 bod
- B2 Nájdenie vrcholov siete tvoriacich úsečku dĺžky $\sqrt{7}$ bez dôkazu: 1 bod
- B3 Nájdenie vrcholov siete tvoriacich rovnostranný trojuholník so stranou $\sqrt{7}$ bez dôkazu: 2 body
- B4 Dôkaz tvrdenia B2 alebo B3: 3 body

Celkovo za takéto neúplné riešenie udeľte súčet počtu bodov za B1, za B4 a maxima z počtov bodov za B2 a za B3.

Kroky odlišných riešení ohodnotte takto:

- C1 Konštrukcia úsečky dĺžky $\sqrt{7}$ (vrátane zdôvodnenia): 4 body
- C2 Konštrukcia rovnostranného trojuholníka s už zostrojenou dĺžkou strany $\sqrt{7}$: 2 body

Celkovo za takéto neúplné riešenie udeľte súčet počtov bodov za C1 a za C2.

3 Prirodzené číslo nazveme *päťtinové*, keď sa presne 20 % jeho deliteľov končí cifrou 5.

- a) Nájdite nejaké päťtinové číslo.
- b) Dokážte, že každé päťtinové číslo má presne 60 % deliteľov končiacich sa cifrou 0.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Nech $d(m)$ je počet (prirodzených) deliteľov čísla m .

Nech $n = 2^a \cdot 5^b \cdot m$, kde a a b sú prirodzené čísla a m nenulové prirodzené číslo nesúdeliteľné s 2 aj s 5. Ukážeme, že

$$d(n) = (a + 1)(b + 1)d(m).$$

Každý takýto deliteľ je totiž tvaru $2^i \cdot 5^j \cdot k$, kde $i \in \{0, \dots, a\}$, $j \in \{0, \dots, b\}$ a k je deliteľ čísla m , pričom rôzne trojice (i, j, k) dávajú rôzne delitele. Máme teda $a + 1$ možností pri výbere exponentu i , $b + 1$ možností pri výbere exponentu j a $d(m)$ možností pri výbere deliteľa k . Deliteľ čísla n sa končí cifrou 5 práve vtedy, keď je deliteľný 5 a zároveň nie je deliteľný 2, t. j. príslušné i je 0, príslušné j je z množiny $\{1, \dots, b\}$ a príslušné k je ľubovoľný deliteľ čísla m (čo je $d(m)$ možností). Počet deliteľov končiacich sa cifrou 5 je teda $1 \cdot b \cdot d(m)$. Podmienka zo zadania teda hovorí, že

$$\frac{b \cdot d(m)}{(a + 1)(b + 1)d(m)} = \frac{1}{5},$$

takže

$$5b = (a + 1)(b + 1),$$

$$5b = ab + a + b + 1,$$

$$4b - ab = a + 1,$$

$$b(4 - a) = a + 1,$$

$$b = \frac{a + 1}{4 - a}.$$

Keďže sú čísla a , $a + 1$ aj b nezáporné, platí $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ a vyskúšaním všetkých štyroch hodnôt dostaneme jediné prirodzené riešenie, a to $(a, b) = (3, 4)$.

Preto $n = 2^3 \cdot 5^4 \cdot m = 5000m$, kde m je nesúdeliteľné s 2 aj 5.

- Zvolíme najjednoduchšiu možnosť $m = 1$. Potom 5000 je päťtinové číslo.

- Postupujeme analogicky ako v úvode riešenia. Deliteľ $2^3 \cdot 5^4 \cdot m$ sa končí cifrou 0, keď je deliteľný 10 (teda 2 aj 5). Exponent pri 2 môžeme vybrať 3 spôsobmi (z celkovo 4), exponent pri 5 môžeme vybrať 4 spôsobmi (z celkovo 5), deliteľa m potom $d(m)$ spôsobmi. Podiel deliteľov päťinového čísla, ktoré sa končia 0, je teda

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot d(m)}{4 \cdot 5 \cdot d(m)}$$

čiže $\frac{3}{5}$, čo je 60 %.

Poznámka:

Ukážeme dve alternatívne riešenia rovnice

$$\frac{b \cdot d(m)}{(a+1)(b+1)d(m)} = \frac{1}{5}.$$

Vzťah možno ďalej upraviť na tvar

$$b = \frac{a+1}{4-a} = -1 + \frac{5}{4-a}.$$

Keďže a aj b sú prirodzené nezáporné čísla, $4-a$ je kladný deliteľ 5, teda $a = 3$.

Ešte inou možnosťou je rozložiť výraz na ľavej strane rovnice

$$ab + a - 4b + 1 = 0$$

ako

$$0 = ab + a - 4b + 1 = (a-4)(b+1) + 5,$$

teda

$$(a-4)(b+1) = -5.$$

Keďže a a b sú prirodzené čísla, platí $b+1 \geq 1$. Číslo -5 možno rozložiť na dva celočíselné činitele, kde druhý je kladný, iba dvoma spôsobmi, a to na -5 a 1 a na -1 a 5 :

- $a-4 = -5$, z čoho $a = -1$, čo nie je možné,
- $a-4 = -1$, z čoho $a = 3$, potom $b+1 = 5$, t. j. $b = 4$.

Riešenie 2:

Predpokladajme najprv, že sa v prvočíselnom rozklade päťinového čísla n vyskytujú iba prvočísla 2 a 5. Všetky takéto čísla usporiadame do nasledujúcej tabuľky obsahujúcej v políčku na i . riadku a j . stĺpci číslo $5^{i-1} \cdot 2^{j-1}$.

1	2	4	8	...
5	10	20	40	...
25	50	100	200	...
125	250	500	1000	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Všetky delitele čísla v nejakom políčku potom tvoria obdĺžnikovú „podtabuľku“ s pravým dolným rohom v tomto políčku a ľavým horným rohom zhodným s ľavým horným rohom celej tabuľky (políčko s číslom 1). Takýmto podtabuľkám budeme hovoriť krátko len obdĺžniky. (Vo vyššie uvedenej tabuľke uvažujeme políčko (2, 3) s číslom 20 a jemu prislúchajúci obdĺžnik je podfarbený.)

Číslo sa končí cifrou 5 práve vtedy, keď je deliteľné 5, ale nie 2. V tabuľke to zodpovedá presne tým políčkam, ktoré ležia v prvom stĺpci a neležia v prvom riadku. Budeme teraz hľadať také obdĺžniky, v ktorých je podiel týchto políčok v tabuľke $\frac{1}{5}$. Nech má obdĺžnik s stĺpcov. V každom riadku je práve jedno políčko v prvom stĺpci, teda podiel deliteľov končiacich sa cifrou 5 je menší ako $1/s$. Preto $s < 5$ (rovnosť vylučuje prvý riadok, kde žiadne číslo končiace cifrou 5 nie je).

Ak má obdĺžnik 2 stĺpce a r riadkov, tak podmienka je

$$\frac{r-1}{2r} = \frac{1}{5},$$

ekvivalentne

$$5r - 5 = 2r,$$

$$3r = 5,$$

$$r = \frac{5}{3},$$

čo je spor.

Ak má obdĺžnik 3 stĺpce a r riadkov, tak podmienka je

$$\frac{r-1}{3r} = \frac{1}{5},$$

ekvivalentne

$$5r - 5 = 3r,$$

$$2r = 5,$$

$$r = \frac{5}{2},$$

čo je spor.

Ak má obdĺžnik 4 stĺpce a r riadkov, tak podmienka je

$$\frac{r-1}{4r} = \frac{1}{5},$$

ekvivalentne

$$5r - 5 = 4r,$$

$$r = 5.$$

V tomto obdĺžniku tvorenom celkovo 20 číslami je práve $3 \cdot 4$ čiže 12 čísel končiacich sa cifrou 0, tieto delitele päťtinového čísla $2^3 \cdot 5^4$ čiže 5000 teda tvoria $\frac{12}{20}$ čiže 60 %.

Keď pripúšťame aj iné prvočinitele päťtinového čísla n , zapíšeme toto číslo rovnako ako v predošlom riešení ako $2^a \cdot 5^b \cdot m$ pre nejaké m nesúdeliteľné s 2 a 5. Tabuľku teraz použijeme tak, že do políčka v i . riadku a j . stĺpci napíšeme všetky delitele n , ktoré majú v prvočíselnom rozklade pri 5 exponent $i - 1$ a pri 2 exponent $j - 1$, teda čísla tvaru $5^{i-1} \cdot 2^{j-1} \cdot k$, kde k je deliteľom m . V každom políčku je teda $d(m)$ čísel. Keďže v úlohe vystupujú len *podielely* počtov deliteľov rôznych typov, môžeme postupovať rovnako ako vo vyššie vyriešenom špeciálnom prípade pre $m = 1$, keď bolo v každom políčku tabuľky jediné číslo.

Pokyny:

V neúplných riešeniach postupujúcich podľa prvého vzorového riešenia ohodnotte kroky nasledovne:

- A1 Všeobecné vyjadrenie podielu deliteľov končiacich sa na 5 alebo na 0: 2 body
- A2 Zostavenie a vyriešenie rovnice pre a, b : 2 body
- A3 Nájdenie päťtinového čísla (dokončenie časti a)): 1 bod
- A4 Výpočet podielu deliteľov päťtinových čísel končiacich na 0 (dokončenie časti b)): 1 bod

Celkovo udeľte súčet počtov bodov za A1, za A2, za A3 a za A4.

Za neúplné riešenia postupujúce podľa druhého vzorového riešenia udeľte body takto:

- B1 Popis tabuľky a pozorovanie o tom, že delitele nejakého jej čísla tvoria obdĺžnik: 2 body
- B2 Použitie tabuľky na nájdenie päťtinového čísla: 1 bod
- B3 Použitie tabuľky na vyriešenie časti b): 2 body (v špeciálnom prípade $2^a \cdot 5^b$), resp. 3 body (za všeobecné riešenie)

Celkovo udeľte súčet počtov bodov za B1, za B2 a za B3.

Za neúplné riešenia postupujúce iným spôsobom udeľte body takto:

- C1 Časť a): 2 body (1 za číslo, 1 za zdôvodnenie)
- C2 Časť b): 4 body

Celkovo udeľte súčet počtov bodov za C1 a za C2.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - recenzenti: Stanislav Krajčí, Peter Novotný
 - preklad: Peter Novotný